Введение в построения циркулем и линейкой

М. Баландин*

Обзор и обозначения

Этот документ является небольшим спецкурсом, основанным на авторской «коллекции» геометрических построений, и изложенным в форме, доступной для старшеклассников; такая цель определила и соответствующий подбор материалов.

Содержание местами перекликается с главой III замечательной книги [6], однако включает много отсутствующего там материала (например, геометрическую теорию решения квадратных уравнений) и изложено намного более популярно. Для понимания вполне достаточно школьных курсов алгебры и геометрии за девять классов.

В разделе 1 рассматриваются некоторые факты, важные для дальнейшего изложения — в идеале школьник уже должен знать их, однако опыт показывает, что это не всегда так.

Раздел 2 посвящён достаточно элементарным построениям, не входящим, однако, в школьный курс явным образом. Они могут быть полезны сами по себе или используются в дальнейшем изложении.

В раздел 3 выделены задачи о делении отрезка, включая знаменитое «золотое сечение».

Разделы 4–6 составляют основное содержание статьи. В них рассматриваются способы решений арифметических и алгебраических задач (в частности, квадратных уравнений). Их цель — наглядно проиллюстрировать известное утверждение о том, что с помощью циркуля и линейки могут быть выполнены любые арифметические операции и в дополнение к ним извлечение квадратного корня. Результат формулируется в виде теоремы 3.

Раздел 7 посвящён построению правильных многоугольников. Указываются способы построения n-угольников для n от 3 до 15 включительно. Даётся простая формулировка теоремы Гаусса—Ванцеля с пояснениями схемы доказательства.

Наконец, раздел 8 носит обзорно-исторический характер и описывает несколько интересных приближённых построений; все они так или иначе могут быть связаны со знаменитой задачей о построении квадратуры круга.

Все построения *точного характера*, описанные в статье, пронумерованы. Для ссылок на них используется символ «№» — так, «№5» означает «см. Построение 5». *Приближённые* построения просто приводятся по тексту с указанием их авторства.

*Новосибирск, `michael.balandin@gmail.com`

Окружности именуются заглавными буквами готического шрифта и описываются своими центрами и радиусами. Запись $\mathfrak{A} = \langle O, AB \rangle$ означает, что окружность $\mathfrak{A}$ имеет центр в точке O, а её радиус равен длине отрезка AB.

Параллельные прямые и отрезки могут отмечаться символами-«уголками» (см. пример на рис. 1). Буквами n и m обозначаются *положительные* целые числа (1,2,3,...); буквой k — *неотрицательное* целое число (0,1,2,...).

1. Базовые знания

В «математике циркуля и линейки» числа представляются длинами отрезков (или, в некоторых случаях, дуг окружностей). **Как следствие, можно рассматривать лишь положительные числа**, и именно так поступали древнегреческие математики, которым мы обязаны расцветом этой науки. Неявно предполагается, что всегда доступен отрезок единичной длины, позволяющий «установить циркуль в единицу».

Циркуль и линейка считаются идеальными инструментами, с помощью которых можно проводить прямые линии и их фрагменты (отрезки, лучи), а также окружности и их дуги (в том числе с радиусом, измеренным по чертежу). Принимается, что для любых линий на чертеже всегда можно отметить точки их пересечения или установить факт их отсутствия. На линейке *нельзя* делать отметки, и с помощью линейки *нельзя* проводить параллельные линии.

Элементарные построения входят в школьный курс, однако нынешнее многообразие учебных программ, учебников и авторских методик привело к тому, что геометрические знания учеников разных школ (и даже разных параллельных классов внутри одной школы) отличаются весьма значительно. Тем не менее, опыт автора показывает, что все современные школьники знакомы со следующими четырьмя построениями циркулем и линейкой:

- по заданному отрезку найти его серединную точку;
- к заданной прямой через заданную точку провести перпендикуляр;
- по заданному углу построить его биссектрису;
- по трём заданным отрезкам построить треугольник с соответствующими сторонами (или установить невозможность его построения).

Для последующих упоминаний и ссылок опишем эти построения (без обоснования и приведения чертежей). За подробностями можно обращаться к прекрасному пособию [7, §17,§19,§21], ничуть не утратившему своей ценности.

Построение 1. *Дан отрезок AB. Построить на нём точку C такую, что $AC = CB$.*

Алгоритм. Раствором циркуля AB построить окружности $\langle A, AB \rangle$ и $\langle B, AB \rangle$. Точки их пересечения обозначить D и E.

Провести отрезок DE. Он пересекает AB в точке C, которая является серединой отрезка: $AC = CB$. □

Построение 2. *Дана прямая и точка A. Построить прямую, проходящую через A и перпендикулярную к данной.*

Алгоритм. Произвольным раствором циркуля x, заведомо превышающим расстояние от точки A до прямой, построить окружность $\langle A, x\rangle$. Точки её пересечения с прямой обозначить B и C.

Тем же раствором построить окружности $\langle B, x\rangle$ и $\langle C, x\rangle$. Точку их пересечения, отличную от A, обозначить D.

Провести прямую AD. Она перпендикулярна к исходной: $AD \perp BC$. □

Эти два построения фактически выполняют одно и то же действие, однако для удобства дальнейшего изложения целесообразно разделять их.

Построение 3. *Дан угол $\angle AOB$. Построить его биссектрису, т.е. найти точку C такую, что $\angle AOC = \angle COB$.*

Алгоритм. Произвольным раствором циркуля x построить окружность $\langle O, x\rangle$. Точки её пересечения со сторонами угла OA и OB обозначить A' и B'.

Построить окружности $\langle A', x\rangle$ и $\langle B', x\rangle$. Точку их пересечения, отличную от O, обозначить C; она даёт искомую биссектрису: $\angle AOC = \angle COB$. □

Построение 4. *Даны длины a, b, c. Построить треугольник $\triangle ABC$, имеющий такие стороны, или установить невозможность его построения.*

Алгоритм. Отметить произвольно точку A и провести через неё произвольную прямую. Отложить на прямой циркулем расстояние a, получив точку B, такую что $AB = a$.

Провести окружности $\mathfrak{A} = \langle A, b\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, c\rangle$. Если они не пересекаются, то построить требуемый треугольник невозможно.

В противном случае обозначить за C любую из двух точек пересечения $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Она даёт искомый треугольник $\triangle ABC$: $AB = a$, $AC = b$, $BC = c$. □

В частности, если не менять раствор циркуля, то этим способом будет построен *равносторонний* треугольник.

Для дальнейших рассуждений нам также понадобятся две теоремы, авторство которых традиционно приписывается Фалесу Милетскому (VII–VI в. до н.э.). Первая из них должна быть хорошо знакома школьникам в ослабленном варианте.

Теорема 1 (Фалес)**.** *Отрезки, отсекаемые параллельными прямыми на двух произвольных прямых, являются одинаково пропорциональными. В частности, параллельные прямые, отсекающие равные отрезки на одной прямой, отсекают равные отрезки и на другой прямой.*

Рис. 1 иллюстрирует эту теорему. Для него справедливы соотношения

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE} = \frac{AF}{AG} = \frac{BD}{CE} = \frac{DF}{EG}.$$

Школьные учебники обычно говорят об отсечении *равных* отрезков на *сторонах угла*, однако в действительности рассекаемые прямые могут быть и параллельными.

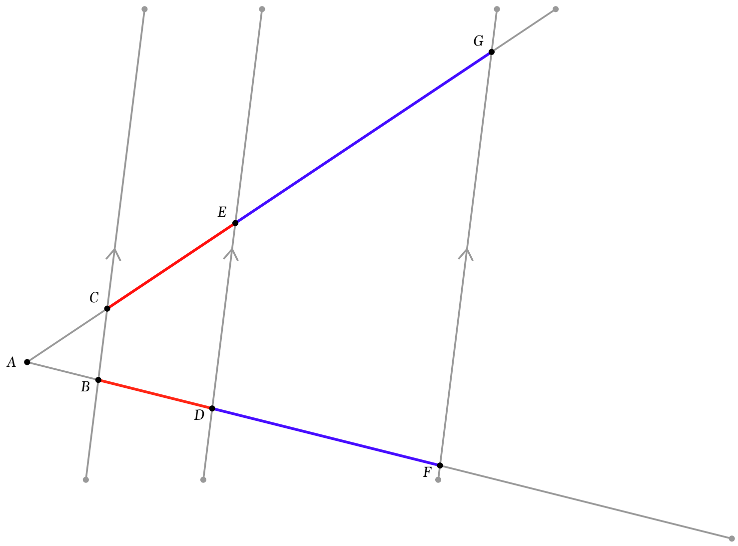

Рис. 1: теорема Фалеса о параллельных отсечениях.

Утверждение о равенстве отрезков может быть обобщено до их пропорциональности — собственно, вся эта теорема основана на понятии подобных треугольников с их пропорциональными сторонами.

Несколько менее известна другая теорема Фалеса о прямом угле и диаметре окружности:

Теорема 2 (Фалес)**.** *Всякий угол, своей вершиной лежащий на окружности, и опирающийся на диаметр этой окружности, является прямым.*

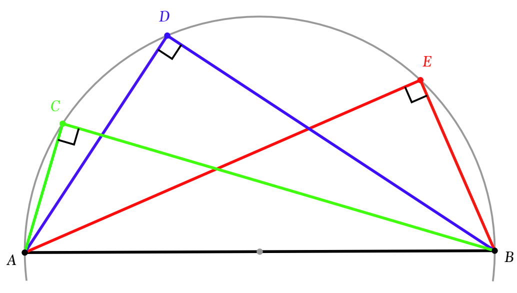

Рис. 2: теорема Фалеса о прямом угле на диаметре окружности.

Суть этой теоремы показана на рис. 2. Обосновать её утверждение можно, например, тем, что из всех четырёхугольников лишь прямоугольник имеет равные диагонали, которые точкой своего пересечения делят друг друга пополам. Соответственно, любая из ломаных ACB, ADB, AEB и т.п. может рассматриваться как часть контура прямоугольника, вписанного в окружность. Другой вариант обоснования, использующий равнобедренные треугольники, см. в [7, §49].

Вторая теорема Фалеса важна для нас тем, что даёт простой способ построения прямого угла, необходимого для решения многих других задач. Именно с него мы начнём следующий раздел.

2. Некоторые элементарные построения

Опыт показывает, что существуют две задачи на построение, с которыми школьники в принципе справляются, но делают это совершенно неоптимальными способами. Это *построение прямого угла* и *построение параллели к заданной прямой через заданную точку*.

Первая из этих задач обычно[1] решается посредством №2. Этот способ больше подходит, когда нужно построить прямой угол по заданной вершине и стороне, тогда как многие построения начинаются с «просто» прямого угла. Здесь по количеству действий удобнее методика, непосредственно основанная на теореме 2:

Построение 5. *Дана точка A. Построить прямой угол, имеющий в ней свою вершину.*

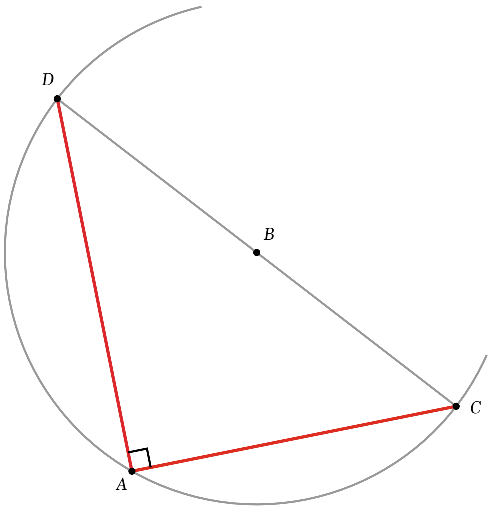

Рис. 3: к построению 5 (прямой угол с заданной вершиной).

[1]Автор однажды столкнулся с ситуацией, когда школьник решил задачу посредством №4 применительно к треугольнику со сторонами $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. Как древнеегипетские землемеры.

Алгоритм. Отметить произвольно точку $B \neq A$. Построить окружность $\langle B, AB\rangle$ и для неё произвольный диаметр CD (желательно, чтобы он возможно дальше отстоял от A). Провести отрезки AD и AC. **Угол $\angle DAC$ — прямой.** (См. рис. 3) □

Со второй задачей ситуация намного забавнее. Если предложить школьнику построить параллель к прямой AB через точку C, то он почти наверняка сделает это в два этапа: сначала посредством №2 построит $CD \perp AB$, затем таким же образом построит $CE \perp CD$. Формально проблема будет решена, но сколько же вспомогательных линий украсит такой чертёж?! Гораздо более изящным является...

Построение 6. *К данной прямой AB через данную точку $C \notin AB$ построить параллельную прямую CD.*

Алгоритм. Построить окружности $\mathfrak{A} = \langle C, AB\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle B, AC\rangle$. Точку их пересечения, лежащую относительно AB по ту же сторону, что и C, обозначить D.

Прямая CD удовлетворяет требованию: $CD \parallel AB$ (см. рис. 4). □

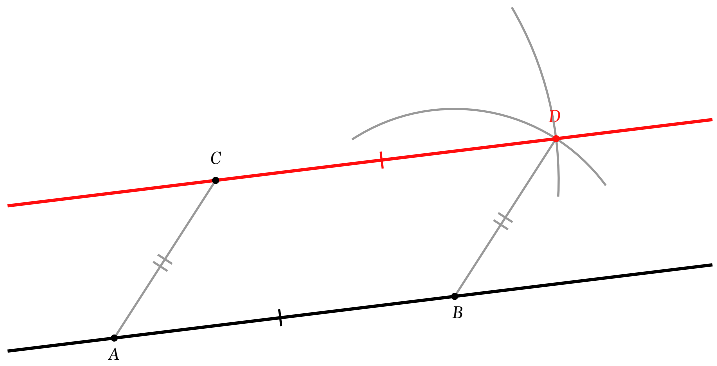

Рис. 4: к построению 6 (параллель через заданную точку).

Правильность данного построения обосновывается тем, что всякий четырёхугольник с равными противолежащими сторонами является параллелограммом. В данном же случае $AB = CD$ и $AC = BD$, так что эти стороны оказываются параллельными.

Упомянем без чертежа и обоснования ещё одно построение — казалось бы, совершенно очевидное, но иногда почему-то вызывающее у школьников проблемы:

Построение 7. *На данном отрезке AB, как на диаметре, построить окружность.*

Алгоритм. Используя №1, разделить AB пополам точкой C. Построить окружность $\mathfrak{A} = \langle C, AC\rangle$, которая удовлетворяет требованию. □

3. Задачи о делении отрезка

Зная построение №1, его многократным применением можно разделить отрезок не только пополам, но и на $n = 2^m$ равных частей. На практике, однако, может возникать задача деления для произвольного n.

В литературе (см., например, [6, гл.III, ч.1, §1] или [7, §57]) решение этой задачи обычно излагается следующим образом:

Построение 8 («книжное»)**.** *Данный отрезок AB разделить на n равных частей.*

Алгоритм. Провести произвольный луч AC, составляющий с отрезком AB угол, не равный $180°$ (желательно острый).

Выбрав произвольный раствор циркуля, последовательно отметить им на луче AC n точек, отстоящих друг от друга на равные расстояния. Последнюю из них обозначить D. Провести отрезок BD.

Через промежуточные точки, отмеченные на луче AC, провести до пересечения с AB прямые, параллельные BD. **Точки пересечения этих прямых с отрезком делят его на равные части.** □

Конечно, данное построение совершенно правильно. Не приводя чертежа, обоснуем его ссылкой на теорему 1. На практике, однако, большинство школьников будет выполнять его «в лоб», нужное число раз используя №6.

Приведём основанный на той же идее более оптимальный метод, позволяющий не засорять чертёж лишними вспомогательными линиями.

Построение 9 (улучшенное)**.** *Данный отрезок AB разделить на n равных частей.*

Алгоритм. Провести произвольный луч AC, составляющий с отрезком AB угол, не равный $180°$ (желательно острый).

Выбрав произвольный раствор циркуля, последовательно отметить им на луче AC n точек, отстоящих друг от друга на равные расстояния. Последнюю из них обозначить D.

Построить окружности $\langle B, AD\rangle$ и $\langle A, BD\rangle$. Точку их пересечения, лежащую по другую сторону от AB сравнительно с D, обозначить E. Провести отрезок BE.

На BE отложить серию точек тем же раствором циркуля, как они откладывались на AD.

Соединить отрезками промежуточные точки, отмеченные на луче AC, с соответствующими точками на AD. **Точки пересечения этих отрезков с отрезком** AB **делят его на равные части.** (см. рис. 5, на котором показан случай $n = 3$) □

Для обоснования этого построения достаточно сослаться на №6. Действительно, отрезки AD и BE оказываются равными и параллельными — а следовательно, параллельны и секущие отрезки, построенные на последнем шаге. Проведённые через равные расстояния на AC, они по теореме 1 делят AB также на равные части.

Сходной задачей является *деление отрезка в заданном соотношении*, так чтобы длины двух его частей соотносились как заданное $m : n$. (Предполагается, конечно, что m и n взаимно просты — если это не так, то дробь предварительно сокращают.) Для этого достаточно разделить отрезок на $(n + m)$ равных частей и найти точку, отстоящую от одного конца на n, а от другого на m таких частей.

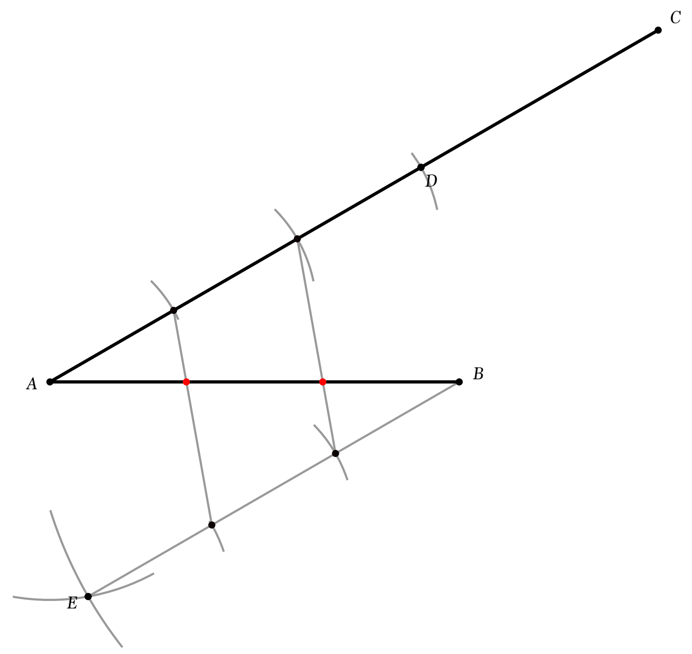

Рис. 5: к построению 9 (деление отрезка на равные части).

На практике, однако, оказывается более удобным следующее построение, приписываемое великому немецкому художнику Альбрехту Дюреру[2] (1471–1528):

Построение 10 (возм., А. Дюрер)**.** *По заданному отрезку AB и числам m, n построить такую точку $G \in AB$, для которой $AG : BG = m : n$.*

Алгоритм. Выбрав произвольно раствор циркуля $x \geqslant AB$, построить окружности $\langle A, x\rangle$ и $\langle B, x\rangle$. Две точки их пересечения обозначить C и D. Провести отрезки AD и BC.

На отрезке AD отложить m раз произвольное расстояние y. Последнюю полученную точку обозначить F. То же расстояние y отложить n раз на отрезке BC. (При необходимости продолжить отрезки.)

Провести отрезок EF. Точку его пересечения с AB обозначить G. **Отрезки AG и BG находятся в требуемом соотношении $m : n$.** (См. рис. 6, где показано деление отрезка 2 : 3) □

Очевидно, это построение использует ту же самую идею, что и предыдущее. Самым интересным оказывается начальный этап: Дюрер смотрит на подлежащий делению отрезок, как на диагональ будущего ромба (являющегося, как известно, частным

[2] Дюрер был очень неплохим математиком своего времени и оставил несколько трактатов учебного характера. Самым известным из них является «Наставление к измерению циркулем и линейкой» (1525), в котором рассмотрены геометрические вопросы теории искусства, архитектуры, фортификации и типографики. Фрагменты этого сочинения можно найти в [8], там же есть документы, свидетельствующие о высокой оценке трактата современниками.

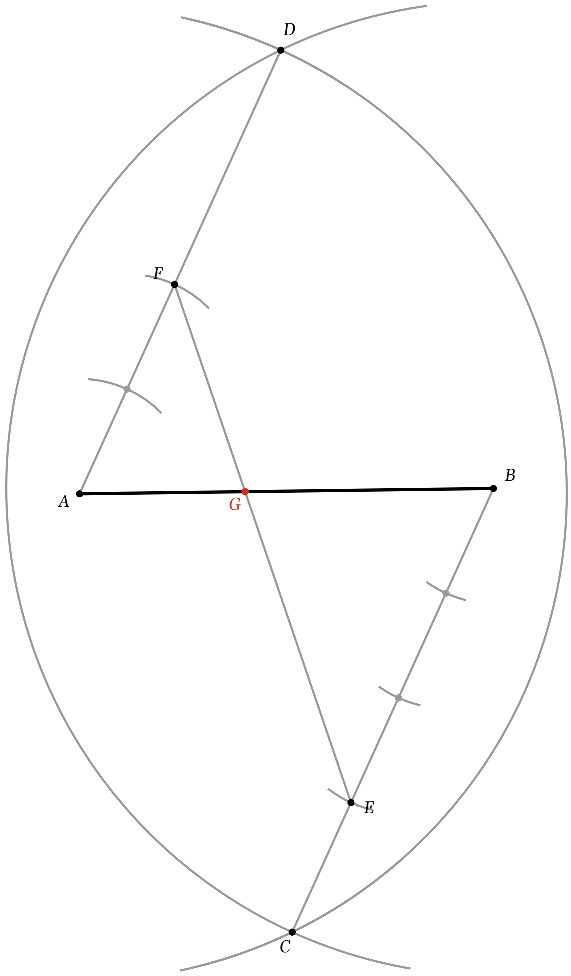

Рис. 6: к построению 10 (деление отрезка в заданном соотношении).

случаем параллелограмма). Поскольку здесь требуются всего лишь две параллельные прямые без привязки к внешним точкам, построение оказывается несколько более простым.

Упомянув Альбрехта Дюрера, оставившего интереснейшие работы по теории изобразительного искусства, остановимся на ещё одной задаче о делении отрезка, имеющей к этой теории самое непосредственное отношение. Это так называемая *задача о золотом сечении.*

Суть её довольно проста. **Данный отрезок (пусть для определённости его длина равна двум) требуется разделить на две неравные части, чтобы меньшая часть относилась к большей так же, как бо́льшая часть относится ко всему отрезку.**

Обозначив бо́льшую часть за x (меньшая, соответственно, будет равна $2 - x$), получим пропорцию

$$\frac{x}{2} = \frac{2-x}{x},$$

которая сводится к легко решаемому квадратному уравнению

$$x^2 + 2x - 4 = 0. \qquad (1)$$

Оно имеет лишь один положительный корень $x = \sqrt{5} - 1$, а искомое отношение составляет

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618. \qquad (2)$$

Это число, равно как и обратное к нему $\frac{1}{\varphi}$, называется «золотым сечением».

Близкие пропорции нередко встречаются в произведениях искусства, хотя представления о том, будто их создатели использовали «золотое сечение» сознательно, явно преувеличены (однако замечательные математические свойства золотого сечения — отнюдь не выдумка: см., например, [9, гл. 23]). Построить же его не составляет никакого труда.

Построение 11. *Для данного отрезка AC найти точку $F \in AC$ такую, что она делит отрезок в пропорции $AF : CF = CF : AC$.*

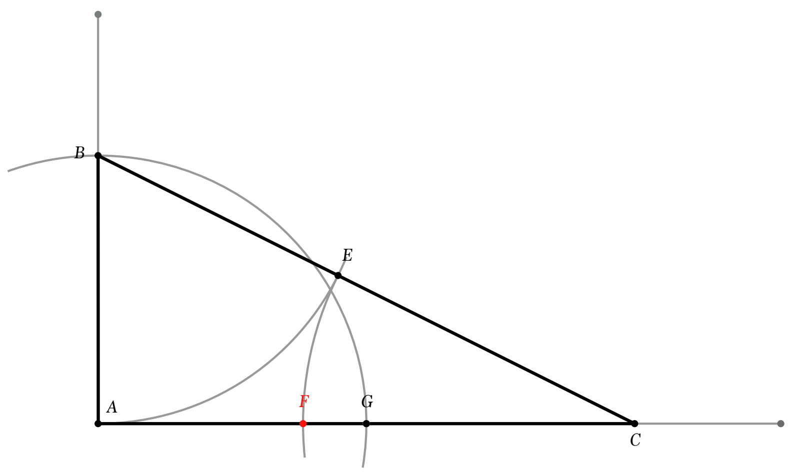

Рис. 7: к построению 11 (деление отрезка в «золотом сечении»).

Алгоритм. Пользуясь №2, построить перпендикуляр к отрезку AC через точку A. Пользуясь №1, разделить AC пополам точкой G.

Отложить расстояние AG на перпендикуляре AC, получив точку B ($AB = AG$). Провести отрезок BC.

Отложить расстояние AB на отрезок BC, получив точку E ($BE = AB$). Отложить расстояние CE на отрезок AB, получив точку F ($CF = CE$).

Точка F делит отрезок AC в требуемом соотношении. (См. рис. 7) □

Обосновать правильность построения можно с помощью теоремы Пифагора. Действительно, треугольник $\triangle ABC$ является прямоугольным, и если принять короткий катет AB за условную единицу измерения, то $AC = 2$. Тогда длина гипотенузы составит $BC = \sqrt{5}$, так что

$$CF = CE = BC - BE = BC - AB = \sqrt{5} - 1,$$

а это в точности совпадает с решением уравнения (1).

4. Арифметические действия циркулем и линейкой

4.1. Сложение и вычитание

Для чисел, представленных длинами отрезков, сложение и вычитание выполняются естественным образом: простым «приставлением» отрезков друг к другу с совмещением концов[3].

Построение 12. *По двум данным отрезкам AB и $CD < AB$ построить отрезки с длинами $AB + CD$ и $AB - CD$.*

Алгоритм. Провести луч, продолжающий отрезок AB за точку B. Построить окружность $\langle B, CD \rangle$. Точки её пересечения с AB обозначить E (ближнюю к A) и F (дальнюю от A).

Отрезки AE и AF удовлетворяют требованию задачи: $AE = AB - CD$, $AF = AB + CD$. (см. рис. 8) □

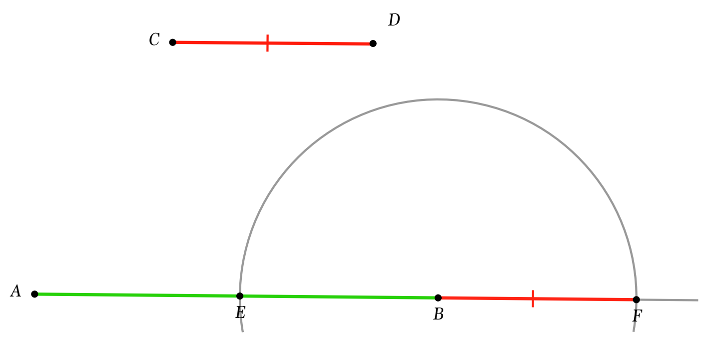

Рис. 8: к построению 12 (сложение и вычитание отрезков).

[3]В 1620 году, вскоре после появления логарифмов, Эдмунд Гантер и Уильям Отред осознали важную вещь: если в качестве длин отрезков использовать не сами величины, а их логарифмы, то сложение и вычитание отрезков приведёт к умножению и делению исходных величин. Так была изобретена логарифмическая линейка, прослужившая многим поколениям математиков и инженеров. В некоторых прикладных областях (например, навигации и артиллерии) специализированные логарифмические линейки используются и по сей день.

Немногим сложнее оказывается сложение и вычитание *углов*, которое понадобится нам в дальнейших разделах.

Построение 13. *По двум данным углам $\angle BAC$ и $\angle EDF < \angle BAC$ построить углы с величинами $\angle BAC + \angle EDF$ и $\angle BAC - \angle EDF$*

Алгоритм. Произвольным раствором циркуля x построить окружности $\mathfrak{A} = \langle A, x\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle D, x\rangle$. Точку пересечения $\mathfrak{A}$ с отрезком AC обозначить I, а точки пересечения $\mathfrak{B}$ с отрезками ED и FD обозначить G и H.

Построить окружность $\langle I, GH\rangle$. Точки её пересечения с $\mathfrak{A}$ обозначить J (ближнюю к AB) и K (дальнюю от AB).

Углы $\angle BAK$ и $\angle BAJ$ удовлетворяют требованию: $\angle BAK = \angle BAC + \angle EDF$, $\angle BAJ = \angle BAC - \angle EDF$. (см. рис. 9) □

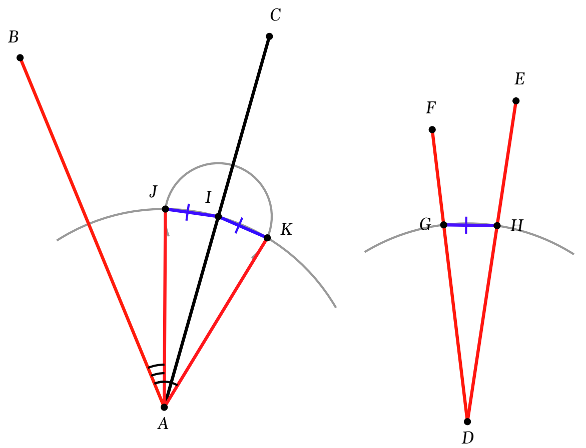

Рис. 9: к построению 13 (сложение и вычитание углов).

Многократное применение этих построений для сложения угла или отрезка с самим собой позволяет умножать соответствующую величину нацело.

4.2. Инверсия (нахождение обратной величины)

Геометрическое нахождение обратной величины играет немаловажную роль в некоторых аспектах математической физики и теории функций комплексной переменной. Мы рассмотрим его в качестве отдельной задачи, хотя далее будут изложены методы, позволяющие решить её в виде частного случая.

Построение 14. *По данному отрезку $AB = x$ построить отрезок длины $\frac{1}{x}$.*

Алгоритм. Из произвольной точки A провести луч. Отметить на нём точку B такую, что $AB = x$.

Посредством №2 построить перпендикуляр к AB через точку B и на нём отметить точку C такую, что $BC = 1$. Провести отрезок AC.

Посредством №2 построить перпендикуляр CE к AC через точку C. Точку его пересечения с лучом AB обозначить D.

Отрезок BD имеет искомую длину: $BD = \frac{1}{AB} = \frac{1}{x}$. (см. рис. 10) $\square$

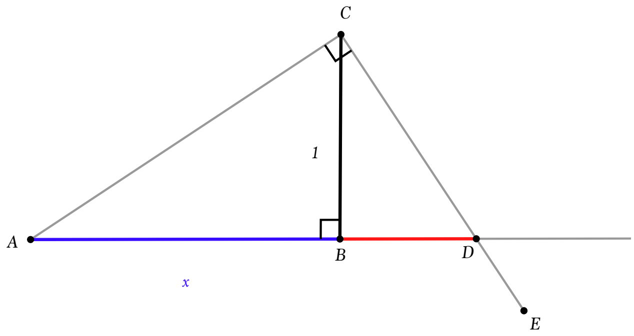

Рис. 10: к построению 14 (нахождение обратной величины).

Справедливость построения следует из подобия треугольников $\triangle CBD \sim \triangle ABC$. Действительно, оба они являются прямоугольными и имеют общий острый угол: $\angle BCD = \angle BAC$.

Отсюда следует пропорциональность сторон:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{BD}{BC}.$$

Вспоминая, что $AB = x$, $BC = 1$, получаем требуемое

$$\frac{1}{x} = \frac{BD}{1} = BD.$$

4.3. Пропорция, умножение и деление

Построение, которое сейчас будет предложено, само по себе весьма несложно, однако играет исключительно важную роль в «арифметике циркуля и линейки». На его основе выполняются операции умножения и деления произвольных чисел.

Построение 15. *По данной тройке числел a, b, c построить четвёртое число x, которое вместе с ними образует пропорцию*

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{c}. \tag{3}$$

Алгоритм. Построить произвольный острый угол с вершиной в точке A. На одной его стороне отложить отрезки $AB = a$ и $AC = b$. На другой стороне отложить отрезок $AE = c$.

Построить отрезок CE. Пользуясь №6, построить прямую, параллельную к CE и проходящую через точку B. Точку её пересечения с AE обозначить D.

Длина отрезка AD есть искомая величина x. (см. рис. 11, на котором предполагается, что $a < b$) $\square$

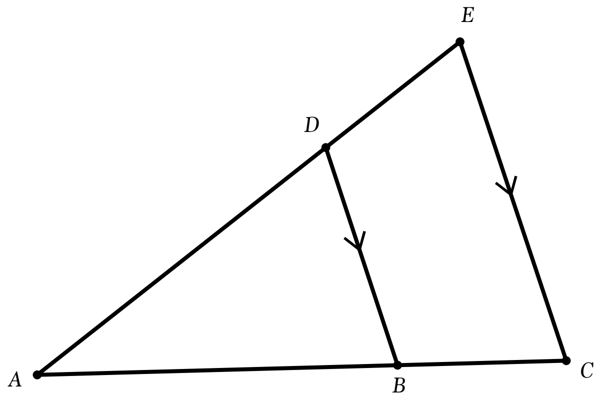

Рис. 11: к построению 15 (двойная пропорция).

Справедливость этого построения сразу же следует из подобия треугольников $\triangle ABD \sim \triangle ACE$ по трём углам.

Заметим ещё, что пропорция (3) может быть записана в эквивалентном «перевёрнутом» виде

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{x},$$

а её левая и правая части могут быть взаимно переставлены. Поэтому построение (15) может быть применено к трём числам, находящимся между собой в любом соотношении.

Посмотрим теперь, как это построение может быть применено к нахождению произведения и частного двух чисел. Пусть эти числа суть p и q.

Запишем пропорцию

$$\frac{p}{1} = \frac{x}{q},$$

тогда $x = pq$. Таким образом, для нахождения произведения pq нужно применить №15 к тройке чисел $(p, 1, q)$. В частности, $(p, 1, p)$ приводит к нахождению $x = p^2$; повторное применение — $(p^2, 1, p)$ и т.п. — даёт следующие натуральные степени p.

Далее, записав пропорцию

$$\frac{p}{q} = \frac{x}{1},$$

получаем частное $\frac{p}{q}$ в результате применения №15 к тройке чисел $(p, q, 1)$.

Наконец, пропорция

$$\frac{1}{p} = \frac{x}{1}$$

говорит о том, что №15 применительно к тройке чисел $(1, p, 1)$ позволяет найти обратную величину $\frac{1}{p}$ (ср. №14). Это даёт возможность находить не только натуральные, но и целые (включая отрицательные) степени чисел.

Итак, пара построений 12 и 15 позволяет выполнять над представленными в виде отрезков числами все четыре арифметических действия, включая и нахождение целых степеней. Таких возможностей достаточно и для решения уравнений первого порядка с положительными коэффициентами. Действительно, уравнение

$$ax + b = c$$

имеет решение

$$x = \frac{c - b}{a}, \tag{4}$$

существующее при $c > b$ (этот факт легко устанавливается сопоставлением отрезков) и находимое посредством вычитания и деления.

Этот арифметический раздел мы завершим цитатой[4] из уже упомянутого трактата Альбрехта Дюрера «Наставление к измерению циркулем и линейкой». Автор рассматривает немного иную пропорцию и решает её чуть по-другому:

> Если ты имеешь две линии, одну длинную и одну короткую, и хочешь найти к ним пропорциональную третью — самую короткую, так чтобы как короткая линия относится к длинной, так и новая кратчайшая относилась к средней, то поступи так. Нанеси обе линии: длинную и короткую, по длине горизонтально друг за другом. Начни с длинной и обозначь их длину ABC. Затем возьми длину более короткой линии BC и помести её точкой B в точку A, и нагни её точкой C' по отношению к горизонтальной линии ABC, и проведи затем от наклонной линии из точки C' к точке B на горизонтальной линии прямую линию. Эта линия образует треугольник $\triangle ABC'$, а нарисованную короткую линию AC' продолжи, насколько это потребуется. Затем проведи соответственную параллельную линию к линии BC' из точки C горизонтальной линии; там, где эта параллельная линия пересечёт продолженную линию AC', там поставь D, тогда линия $C'D$ будет пропорциональной к двум заданным линиям ABC и наименьшей, и она относится к средней, как средняя относится к большей, ибо обе параллельные линии и BC' делят эти линии пропорционально.

Язык математики начала XVI века довольно тяжеловесен, но общую идею понять вполне можно. Здесь строится пропорция $b : a = c : b$, в которой неизвестной величиной является c.

5. Алгебраические действия циркулем и линейкой

5.1. Среднее геометрическое и квадратный корень

Как известно, средним геометрическим двух чисел a, b называется такое число x, которое, будучи умноженным само на себя, даёт произведение ab. В более современных обозначениях,

$$x = \sqrt{ab}. \tag{5}$$

[4]Приводится по [8], с изменением обозначений точек, отрезков и треугольников на современные.

Построение 16. *По заданной паре чисел* (a, b) *найти их среднее геометрическое* $\sqrt{ab}$.

Алгоритм. Провести произвольную прямую, отметить на ней точку A. По одну сторону от неё отложить расстояние $AB = a$, по другую $AC = b$.

Пользуясь №7, построить на отрезке BC, как на диаметре, полуокружность $\mathfrak{A}$. Пользуясь №2, построить к BC перпендикуляр через точку A.

Часть этого перпендикуляра AD**, заключённая между отрезком** BC **и полуокружностью** $\mathfrak{A}$**, есть искомое среднее геометрическое:** $AD = \sqrt{AB \cdot AC}$. (см. рис. 12) □

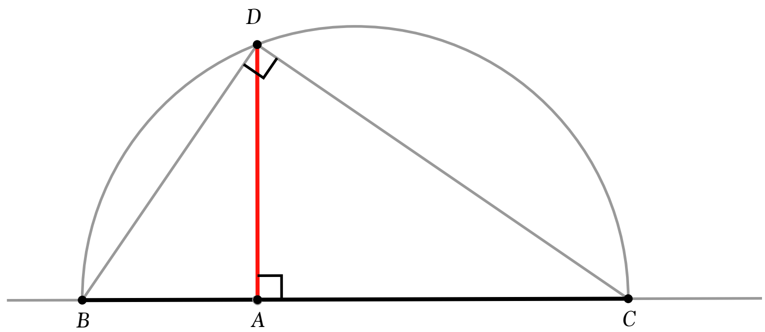

Рис. 12: к построению №16 (среднее геометрическое).

Доказательство правильности построения опять-таки основано на подобии прямоугольных треугольников: $\triangle DAB \sim \triangle CAD$ (по острому углу: $\angle ADB = \angle ACD$). Соответственно, для их сторон выполняется пропорция

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AC},$$

откуда $AD^2 = AB \cdot AC = ab$.

Зная №16, нетрудно найти квадратный корень из числа: для этого достаточно в (5) положить $b = 1$, тогда $x = \sqrt{a}$. Ввиду важности этой операции выделим её в отдельное построение:

Построение 17. *По данному числу* a *построить его квадратный корень* $\sqrt{a}$.

Алгоритм. Применить №16 к паре чисел $(a, 1)$. □

Ещё один метод нахождения квадратного корня основан на теореме Пифагора; он особенно удобен в тех случаях, когда для числа a известно какое-либо представление в виде суммы двух квадратов $a = p^2 + q^2$. Искомый корень $\sqrt{a}$ оказывается тогда равным гипотенузе прямоугольного треугольника с катетами p, q.

Построение 18. *По данному числу a с известным представлением $a = p^2 + q^2$ найти $\sqrt{a}$.*

Алгоритм. Пользуясь №5, построить прямой угол с вершиной в точке A. Отложить расстояние $AB = p$ на одной сторону угла и расстояние $AC = q$ на другой стороне. Провести отрезок BC.

Длина отрезка BC равна искомому корню: $BC = \sqrt{a}$. □

Нетрудно заметить, что мы уже неявно пользовались этим приёмом в №11 для нахождения $\sqrt{5} = \sqrt{2^2 + 1^2}$.

Предупреждая возможный вопрос, стоит упомянуть следующий факт: натуральное число может быть представлено суммой двух квадратов натуральных чисел тогда и только тогда, когда его разложение в произведение простых чисел не содержит множителей вида $(4k + 3)$ в нечётных степенях. С другой стороны, в №18 числа p и q могут быть любыми, не обязательно натуральными.

5.2. Целые степени числа

Комбинация построений 14 (без которого можно даже обойтись) и 15 в принципе позволяет найти любую целую степень любого данного числа. Мы, однако, приведём ещё один, компактный, вариант такого построения, позволяющий удобно отслеживать возрастание или убывание результата.

Построение 19. *По данному числу $x > 1$ построить его произвольную целую степень x^j, $j \in \mathbb{Z}$.*

Алгоритм. Провести произвольный луч из точки A. Отложить на нём расстояние $AB = 1$. Пользуясь №2, построить перпендикуляр к AB через точку B.

Построить окружность $\langle A, x \rangle$. Любую из двух точек её пересечения с этим перпендикуляром обозначить C. Провести луч AC, замыкающий прямоугольный треугольник $\triangle ABC$.

Построить перпендикуляр к AC через C, точку его пересечения с лучом AB обозначить D.

Построить перпендикуляр к AD через D, точку его пересечения с лучом AC обозначить E.

Продолжать процесс, последовательно получая точки $F, G, H, I, \ldots$ (см. рис. 13).

Расстояния от A до этих точек, измеренные вдоль лучей, дают искомые степени: $AB = 1 = x^0$, $AC = x^1$, $AD = x^2$, $AE = x^3$,... При необходимости построение может быть продолжено «в другую сторону» (с приближением к точке A), давая *отрицательные* степени числа x. □

Это построение обобщает №14, №15, №16; его доказательство также основано на подобии треугольников, выполняется по тому же принципу и не представляет никакой сложности. Его вполне можно оставить в качестве упражнения.

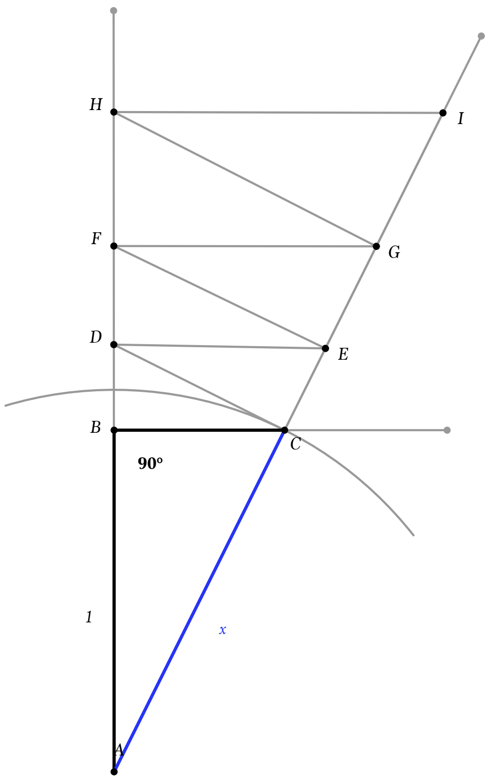

Рис. 13: к построению №19 (целые степени числа).

5.3. Решение квадратных уравнений

В этой части статьи мы рассмотрим геометрические методы решения приведённого квадратного уравнения

$$x^2 + px + q = 0. \tag{6}$$

Как известно из школьного курса алгебры, его корни могут быть найдены по формуле

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{7}$$

Внимательный читатель не мог не заметить, что она содержит только такие математические действия, для которых уже были приведены построения, и стало быть, вполне может быть «вычислена» их комбинацией. Однако математики древности такой «прямой» возможности не имели: формула (7) не была им известна и к тому же они не знали отрицательных чисел.

Обратимся к истории математики и к первоисточникам. У Эвклида в «Началах» (III в. до н.э.) ещё нет общей теории решения квадратных уравнений, хотя приводятся построения, явно предназначенные именно для этой цели[5]. Сочинения других тогдашних авторов — например, Архимеда [4] — свидетельствуют о том, что решать квадратные уравнения греки действительно умели.

Такая теория, стройная и последовательная, появилась лишь у арабских математиков, и во времена Аль-Хорезми (VIII в. н.э.) она начинает «обрастать» чисто алгебраическими методами. Ко времени Омара Хайяма (XI в. н.э.) её формирование уже вполне завершено и она перестала считаться «остриём науки» — хотя и находилась, конечно, на уровне тогдашнего «высшего образования».

Ограниченные лишь положительными числами, арабские математики классифицировали общее уравнение (6) на пять частных типов, относя разные слагаемые в разные части:

- Тип I. «Квадрат равен числу»: $x^2 = m$;
- Тип II. «Квадрат равен корням»: $x^2 = ax$;
- Тип III. «Квадрат равен корням и числу»: $x^2 = ax + m$;
- Тип IV. «Квадрат и корни равны числу»: $x^2 + ax = m$;
- Тип V. «Квадрат и число равны корням»: $x^2 + m = ax$.

Названия этих типов приведены по «Краткой книге об исчислении алгебры и алмукабалы» аль-Хорезми [5]; они удобны и информативны. Далее мы рассмотрим их все.

Тип I: «Квадрат равен числу»

Неполное квадратное уравнение $x^2 = m$, геометрический смысл которого сводится к нахождению стороны квадрата по данной его площади.

Решение этой задачи заключается в построении квадратного корня $x = \sqrt{m}$, которое уже рассматривалось (№17).

Тип II: «Квадрат равен корням»

Неполное квадратное уравнение $x^2 = ax$, геометрический смысл которого сводится к нахождению такого отрезка, что построенный на нём квадрат $x \times x$ имеет одинаковую площадь с прямоугольником $x \times a$, построенным между этой же стороной и фиксированным отрезком длины a.

Этот случай даже не требует построений: очевидно, что два прямоугольника с общей стороной имеют одинаковые площади тогда и только тогда, когда у них совпадают другие стороны; отсюда сразу $x = a$.

(Данное рассуждение соответствует алгебраическому сокращению обеих частей уравнения на x, и именно так объяснял его смысл аль-Хорезми.)

[5]См. [2, II:4,5,6,7,8,11] и в [8, вып.2, разд.II] пример решения уравнения $x(a - x) = b^2$.

Тип III: «Квадрат равен корням и числу»

Квадратное уравнение $x^2 = ax + m$ имеет следующий геометрический смысл: найти такой отрезок x, что построенный на нём квадрат $x \times x$ имеет такую же площадь, как вместе взятые заданный квадрат $\sqrt{m} \times \sqrt{m}$ с прямоугольником $x \times a$ между тем же отрезкой и фиксированной длиной a.

Подставляя в (6) коэффициенты $p = -a$ и $q = -m$, получаем согласно (7), что данный случай всегда имеет одно и только одно положительное решение

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m} + \frac{a}{2}. \tag{8}$$

Наиболее просто оно строится следующим образом.

Построение 20. *По данным $a, m > 0$ решить квадратное уравнение $x^2 = ax + m$.*

Алгоритм. Пользуясь №1 и №17, построить числа $\beta = \frac{a}{2}$ и $\lambda = \sqrt{m}$.

Пользуясь №2 или №5, построить прямой угол с вершиной O. На одной его стороне отложить отрезок $OA = \beta$, на другой $OB = \lambda$.

Построить окружность $\langle A, AB \rangle$. Точку её пересечения с лучом OA обозначить C. **Длина отрезка OC равна корню уравнения.** (см. рис. 14) □

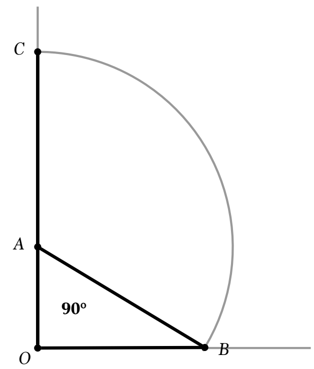

Рис. 14: к построению 20 (решение уравнения $x^2 = ax + m$).

Для доказательства правильности построения воспользуемся теоремой Пифагора. Гипотенуза прямоугольного треугольника $\triangle AOB$ равна

$$AB = \sqrt{AO^2 + BO^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m}.$$

Тогда

$$OC = AC + OA = AB + OA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m} + \frac{a}{2},$$

что в точности совпадает с (8).

Тип IV: «Квадрат и корни равны числу»

Квадратное уравнение $x^2 + ax = m$ имеет следующий геометрический смысл: найти такой отрезок x, что построенный на нём квадрат $x \times x$ вместе с прямоугольником $x \times a$, построенным между той же стороной и фиксированным отрезком a, имеют такую же общую площадь, как заданный квадрат $\sqrt{m} \times \sqrt{m}$.

Подставляя в (6) коэффициенты $p = a$ и $q = -m$, получаем согласно (7), что данный случай всегда имеет одно и только одно положительное решение

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m} - \frac{a}{2}. \tag{9}$$

Построение 21. *По данным $a, m > 0$ решить квадратное уравнение $x^2 + ax = m$.*

Алгоритм. Пользуясь №1 и №17, построить числа $\beta = \frac{a}{2}$ и $\lambda = \sqrt{m}$.

Провести прямую через произвольную точку O. Пользуясь №2, построить к ней перпендикуляр через эту точку. На прямой отложить отрезок $OA = \beta$, на перпендикуляре отрезок $OB = \lambda$.

Построить окружность $\langle A, AB \rangle$. Точку её пересечения с прямой, лежащую по другую сторону от O относительно A, обозначить C. **Длина отрезка OC равна корню уравнения.** (см. рис. 15) □

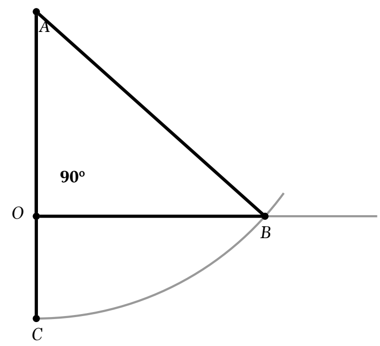

Рис. 15: к построению 21 (решение уравнения $x^2 + ax = m$).

Доказательство правильности построения практически идентично предыдущему случаю, за исключением того, что

$$OC = AC - OA = AB - OA = \sqrt{\frac{a^2}{4} + m} - \frac{a}{2},$$

а это совпадает с (9).

Тип V: «Квадрат и число равны корням»

Наиболее сложный случай. Квадратное уравнение $x^2 + m = ax$ имеет следующий геометрический смысл: найти такой отрезок x, что построенный между ним и фиксированным отрезком a прямоугольник $x \times a$ имеет равную площадь с квадратом на том же отрезке $x \times x$ и заданным квадратом $\sqrt{m} \times \sqrt{m}$.

Подставляя в (6) коэффициенты $p = -a$ и $q = m$, получаем согласно (7), что решением является

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}. \tag{10}$$

В зависимости от подкоренного выражения — дискриминанта $(\frac{a^2}{4} - m)$ — уравнение может не иметь корней, иметь единственный корень или иметь два корня. Заметим, что если дискриминант положителен, то в силу неравенства

$$0 < \sqrt{\frac{a^2}{4} - m} < \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

оба вещественных корня будет положительными. Также и в случае равенства дискриминанта нулю единственный корень будет положительным.

Построение 22. *По данным $a, m > 0$ решить квадратное уравнение $x^2 + m = ax$.*

Алгоритм. Пользуясь №1 и №17, построить числа $\beta = \frac{a}{2}$ и $\lambda = \sqrt{m}$. **В случае $\beta = \lambda$ их общее значение является единственным корнем уравнения.**

Пользуясь №2 или №5, построить прямой угол с вершиной O. На одной его стороне отложить отрезок $OA = \lambda$. Построить окружность $\langle A, \beta \rangle$, точку её пересечения с другой стороной угла обозначить B. **Отсутствие пересечения означает отсутствие корней.**

Провести луч AB. Построить окружность $\langle B, OB \rangle$. Точки её пересечения с лучом AB обозначить E и D. **Длины отрезков AE и AD суть корни уравнения.** (См. рис. 16) □

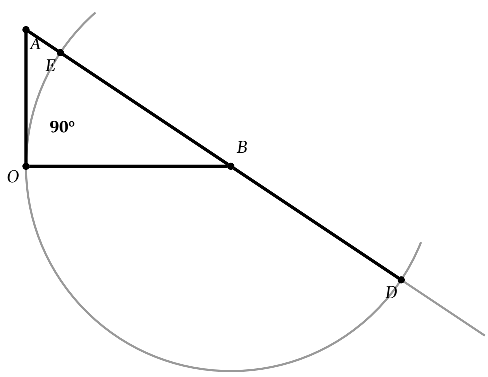

Рис. 16: к построению 22 (решение уравнения $x^2 + m = ax$).

Для доказательства этого построения заметим, что

$$OB = BE = BD = \sqrt{AB^2 - OA^2} = \sqrt{\beta^2 - \lambda^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}.$$

Это квадратный корень из дискриминанта уравнения. Тогда

$$AE = AB - BE = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - m},$$

$$AD = AB + BD = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}.$$

Как видно, выражения совпадают с (10).

Дополнение: построение Омара Хайяма для типа V

Предложенные выше построения 20–22 несложны и правильны, однако было бы ошибкой считать, что математики древности решали квадратные уравнения именно такими способами. Изучение их трудов показывает, что для этого применялись гораздо более сложные методы, в которых обязательным считалось построение чертежа, точно отражающего геометрический смысл задачи. Лишь после аль-Хорезми от этой традиции начали отказываться ради упрощения и ускорения решения.

Соблюдая историческую справедливость, приведём для сравнения[6] подлинное построение XI века, принадлежащее Омару Хайяму [3]. Оно было предназначено для решения квадратного уравнения типа V и сыграло важную роль в арабской математике: Хайям предложил его для доказательства того факта, что квадратное уравнение может иметь два различных положительных вещественных корня. Без алгебраической символики это далеко не очевидно — греки, например, знали только один корень (на рис. 16 это AE).

Построение 23 (Омар Хайям)**.** *По данным $a, m > 0$ решить квадратное уравнение $x^2 + m = ax$.*

Алгоритм. Пользуясь №17, построить число $\lambda = \sqrt{m}$. Провести отрезок $AB = a$.

Пользуясь №1, разделить AB пополам точкой C. Пользуясь №7, построить на AC как на диаметре полуокружность $\mathfrak{A}$.

Построить окружность $\langle A, \lambda \rangle$, и точку её пересечения с $\mathfrak{A}$ обозначить D. **Отсутствие пересечения означает отсутствие корней.**

Построить окружность $\langle C, CD \rangle$ и точку её пересечения с BC обозначить E.

Длины отрезков AE и BE являются корнями уравнения. (См. рис.17) $\square$

Доказательство правильности этого построения не составляет особого труда и вполне может быть оставлено в качестве упражнения.

[6] Излагается в современной манере. Оригинал слишком длинен, так как сопровождается пространными доказательными рассуждениями чисто словесного характера.

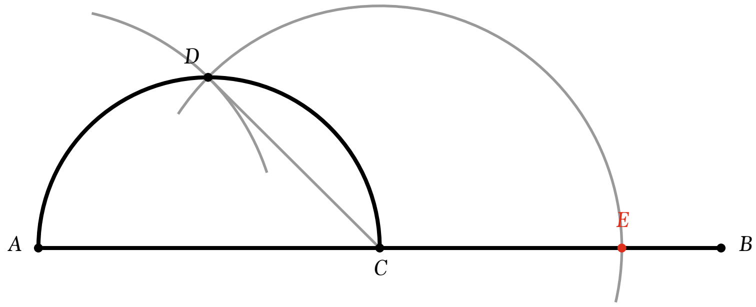

Рис. 17: к построению 23 (решение уравнения $x^2 + m = ax$ по Хайяму).

6. Промежуточные выводы

Подведём некоторые итоги, нужные для последующего изложения.

Пусть $n, m \in \mathbb{N}$. Многократным повторением единичного отрезка (№12) построим эти числа геометрически и затем посредством №15 найдём их отношение $\frac{n}{m}$. Очевидно, так *можно построить любое рациональное число.* (Можно поступить и по-другому — разделить произвольный отрезок в соотношении $n : m$, получив длины a, b и применить затем №15 к числам $a, b, 1$.)

Далее, построения 12, 14, 15, 19 позволяют выполнять над любыми уже построенными числами арифметические действия, включая и нахождение целых степеней. Построение 17 добавляет к ним операцию извлечения квадратного корня, позволяя строить не только рациональные, но и некоторые из иррациональных чисел.

Наконец, мы видели, что решение уравнения первой степени (4) и второй степени (7) не выходит за рамки перечисленных действий.

Всё это позволяет считать доказанной следующую теорему:

Теорема 3. *Любое рациональное число, а равно и всякое число, выражаемое посредством конечного количества арифметических действий (включая сюда нахождение целых степеней) и операций извлечения квадратного корня относительно рациональных чисел, может быть построено с помощью циркуля и линейки. Любое уравнение первого или второго порядка, заданное своими коэффициентами, может быть решено*[7] *циркулем и линейкой.*

В дальнейшем мы для краткости будем называть такие построимые числа *геометрическими*, равно как и форму их записи, из которой видна последовательность требуемых действий. Например, константа золотого сечения есть геометрическое число, а (2) даёт геометрическую форму его записи.

Достаточно очевидно также, что с помощью циркуля и линейки могут быть решены *некоторые* уравнения степени выше второй — например, биквадратное уравнение.

[7]Или для него установлен факт отсутствия решения.

7. Правильные многоугольники

7.1. Основные приёмы

В задачах о построении правильного (равностороннего и равноугольного) многоугольника обычно подразумевается, что он должен быть построен «вообще», т.е. без привязки к каким-то размерам.

При таком подходе многоугольник вполне однозначно определяется своим *центральным углом* — углом между двумя отрезками, соединяющими центр описанной окружности с двумя соседними вершинами. Для правильного n-угольника он составляет $\frac{360°}{n}$, и если его каким-то образом удалось построить, то не составляет труда построить и сам n-угольник:

Построение 24. *По данному центральному углу* $\alpha = \frac{360°}{n}$ *построить правильный* n*-угольник.*

Алгоритм. Пусть заданным углом является $\angle AOB$. Выбрав произвольный раствор циркуля x и произвольную точку O' (она может совпадать с O), построить окружности $\mathfrak{A} = \langle O, x\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle O', x\rangle$. Точки пересечения $\mathfrak{A}$ со сторонами угла $\angle AOB$ обозначить A' и B'.

Выбрав на $\mathfrak{B}$ произвольную точку I, построить окружность $\langle I, A'B'\rangle$ до пересечения с $\mathfrak{B}$ в точке J, затем окружность $\langle J, A'B'\rangle$ до пересечения с $\mathfrak{B}$ в точке K и т.д. Процесс заканчивается по возвращении в исходную точку I.

Построенные таким образом точки $I, J, K, \ldots$ **являются вершинами искомого многоугольника.** (См. рис. 18, на котором изображено построение восьмиугольника) □

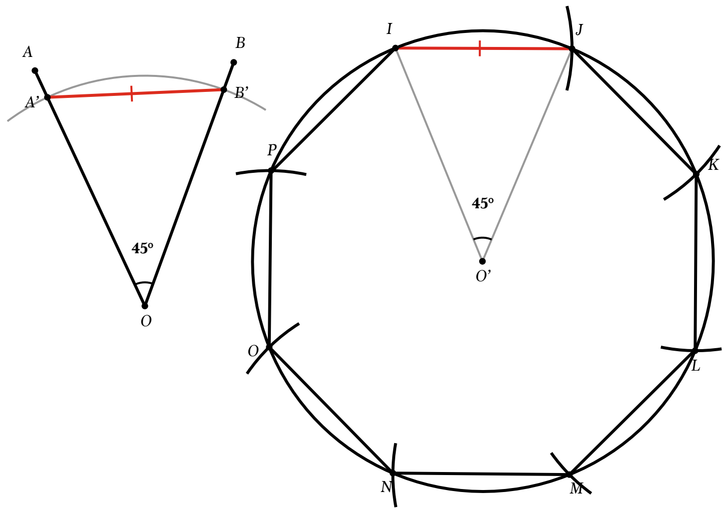

Рис. 18: к построению 24 (правильный n-угольник по центральному углу).

Правильность этого построения обеспечивается равенством треугольников

$$\triangle A'OB' = \triangle IO'J = \triangle JO'K = \dots$$

(по трём сторонам) и тем фактом, что у окружностей с одинаковыми радиусами равными хордами стягиваются равные дуги.

Таким образом, можно говорить о том, что построение правильного многоугольника сводится к построению его центрального угла. Здесь оказывается полезным...

Построение 25. *По данному* $x \in (0, 1)$ *построить углы* α *и* β *такие, что* $\cos\alpha = x$ *и* $\sin\alpha = x$.

Алгоритм. Пользуясь №5, построить прямой угол с вершиной в точке A. На одной из его сторон отложить отрезок $AB = x$.

Построить окружность $\langle B, 1\rangle$ до пересечения с другой стороной угла в точке C. **Тогда углы** $\alpha = \angle ABC$ **и** $\beta = \angle ACB$ **являются искомыми:** $\cos\angle ABC = x$**,** $\sin\angle ACB = x$**.** (См. рис. 19) □

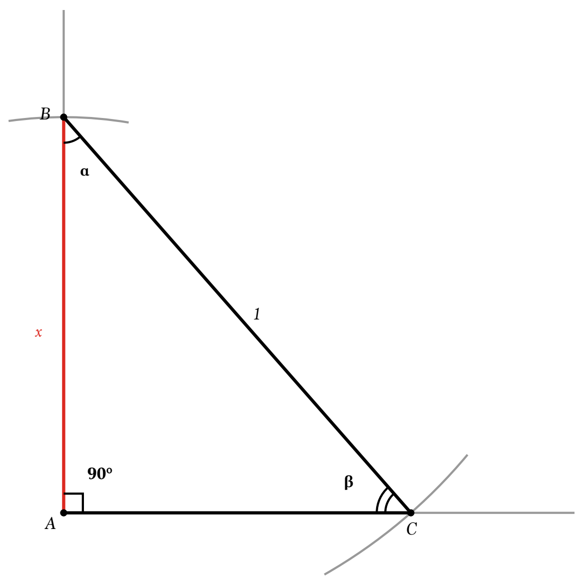

Рис. 19: к построению 25 (угол по синусу или косинусу).

Это построение непосредственно следует из определения синуса и косинуса, как отношений катетов прямоугольного треугольника к гипотенузе.

Отсюда и из теоремы 3 вытекает следующая важная теорема о построимости:

Теорема 4. *Если число* $n \in \mathbb{N}$ *таково, что угол* $\frac{360^\circ}{n}$ *имеет своим синусом или косинусом*[8] *геометрическое число, то правильный* n*-угольник может быть построен циркулем и линейкой.*

[8]Из тождества $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, вытекает, что синус и косинус любого угла либо *одновременно являются* геометрическими числами, либо *одновременно не являются* ими.

Вспомнив школьную таблицу синусов и косинусов для углов $0°, 30°, 45°, 60°, 90°$, можно убедиться, что двенадцатиугольник, восьмиугольник, шестиугольник и четырёхугольник могут быть построены.

Древнегреческие математики умели строить правильные n-угольники для случаев $n = 3, 4, 5, 15$. Они также понимали, что из уже построенного n-угольника можно получить $2n$-угольник простым делением пополам центрального угла — это покрывало случаи $n = 6, 8, 10, 12, 16, \ldots$ Открытым оставался вопрос о $n = 7, 9, 11, 13, \ldots$

Со времён Эвклида и до 1796 года на этот счёт не было достигнуто **никаких** результатов, пока девятнадцатилетний Карл Фридрих Гаусс не доказал интересный факт:

> Если число $n \in \mathbb{N}$ таково, что оно представляется в виде произведения
>
> $$n = 2^k \cdot 3^* \cdot 5^* \cdot 17^* \cdot 257^* \cdot 65537^*, \tag{11}$$
>
> где индекс «$*$» означает, что соответствующее число берётся в степени 0 или 1, то угол $\frac{360°}{n}$ имеет своими синусом и косинусом геометрические числа.

Результат Гаусса требует некоторых дополнительных пояснений, так как в действительности он носит более общий характер. Посмотрим внимательно на присутствующие в нём числа $3, 5, 17, 257, 65537$.

Все они простые, и все принадлежат числовой серии

$$2^{(2^m)} + 1 \tag{12}$$

(это так называемые числа Ферма́). Если удастся найти другие простые числа вида (12), то условие (11) пополнится новыми сомножителями.

На данный момент неизвестно, существуют ли другие простые числа Ферма, помимо этих пяти. Известно лишь, что в диапазоне от 65538 до $10^{2585827972}$ таких чисел точно нет, а бо́льшие числа[9] вряд ли представляют интерес для геометрических построений.

В свете теоремы 4 любое число n, удовлетворяющее (11), допускает построение правильного n-угольника циркулем и линейкой.

Гаусс был совершенно убеждён, что *только эти* многоугольники и могут быть построены, однако в то время не сумел строго доказать такое утверждение. Лишь сорок лет спустя, в 1836 году, это удалось Пьеру Лорану Ванце́лю. Их совместный результат так и называется *теоремой Гаусса—Ванцеля*:

Теорема 5 (К. Гаусс, П. Ванцель)**.** *Из всех правильных n-угольников посредством циркуля и линейки могут быть построены те и только те, у которых число вершин n удовлетворяет условию* (11).

Известно, что Гаусс считал этот результат своим первым значительным математическим достижением и очень им гордился. В конце жизни он даже высказывал желание, чтобы на его надгробии был высечен вписанный в окружность правильный

[9] Для сравнения: число элементарных частиц в видимой части Вселенной заведомо не превосходит 10^{100}.

семнадцатиугольник... но был разочарован. Ни один скульптор и ни один камнерез не взялся за такой заказ — все утверждали, что при работе по камню нельзя будет обеспечить требуемую точность построений, и разница между многоугольником и окружностью в лучшем случае окажется незаметной, а в худшем будет выглядеть неаккуратными сколами на каменной поверхности[10].

Рассмотрим теперь способы построения правильных n-угольников для нескольких начальных значений n.

Правильный (равносторонний) **треугольник** строится посредством №4 без изменения раствора циркуля ($a = b = c$). Он даже не требует построения центрального угла (составляющего $120°$) — напротив, на практике это по правильному треугольнику удобнее строить такой угол. Достаточно продолжить любую его сторону: на рис. 20 имеет место $\angle IGL = 120°$.

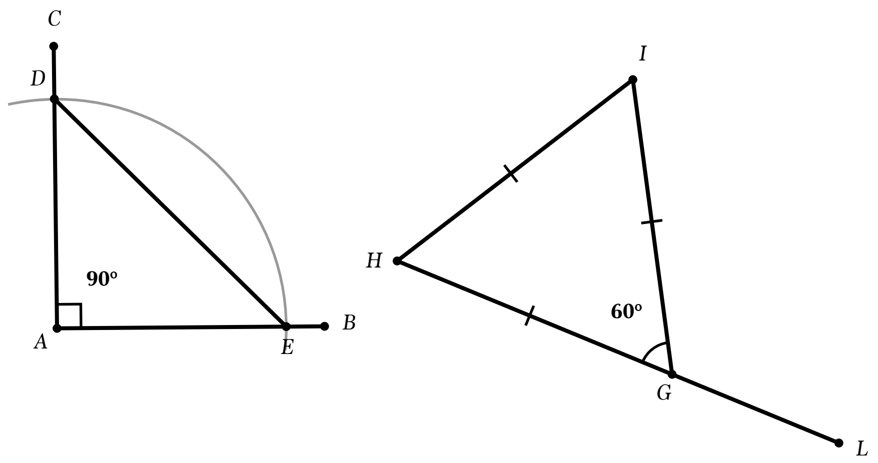

Рис. 20: построение углов $45°$, $60°$, $120°$.

Правильный **четырёхугольник** (квадрат) имеет центральный угол $90°$ и может быть построен посредством №5 либо №2. Это единственный случай, когда центральный угол совпадает с внешним (т.е., углом при вершине).

Правильный **пятиугольник** имеет центральный угол $72°$, для которого справедливо соотношение

$$\cos 72° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}. \tag{13}$$

Внимательному читателю не составит труда самостоятельно построить этот косинус и этот угол, поэтому сейчас мы ограничимся описанием (пока без доказательства)

[10] Создатель памятника Гауссу в Брауншвейге (где тот жил и работал десять лет) сумел уважить последнюю волю учёного и обойти этот неприятный момент: он догадался изобразить не многоугольник, а семнадцатилучевую звезду. А памятник в Гёттингене имеет семнадцатиугольный постамент.

простого и наиболее известного построения, а затем вернёмся к вопросу о пятиугольнике отдельно в разд. 7.3.

Построение 26. *Построить угол величиной* $72°$.

Алгоритм. Построить окружность $\mathfrak{A}$ с центром в точке A. Провести её произвольный диаметр BC.

Пользуясь №2, построить радиус AD такой, что $AD \perp BC$. Пользуясь №1, разделить отрезок AB точкой F.

Построить дугу окружности $\langle F, FD\rangle$. Точку её пересечения с отрезком AC обозначить G. Построить дугу окружности $\langle D, DG\rangle$. Любую точку её пересечения с $\mathfrak{A}$ обозначить H.

Угол $\angle DAH$ **является искомым:** $\angle DAH = 72°$**.** (См. рис. 21) □

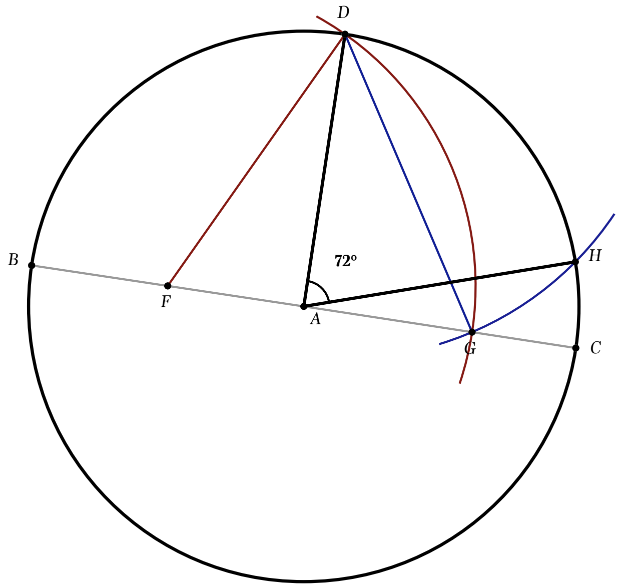

Рис. 21: к построению 26 (угол $72°$, правильный пятиугольник).

Внимательный читатель также должен был заметить связь этого косинуса с константой золотого сечения (2): $2\cos 72° = \varphi$, и сделать отсюда вывод о связи золотого сечения с правильным пятиугольником. Такая связь действительно существует: *в правильном пятиугольнике любые две диагонали точкой своего пересечения делят друг друга в пропорции золотого сечения.* На рис. 22, например, $\frac{BG}{EG} = \frac{EG}{EB}$ (и аналогично для диагонали CF).

Правильный **шестиугольник** строится по центральному углу $60°$, который проще всего получить построением правильного треугольника. Соответственно, его сторона равна радиусу описанной окружности.

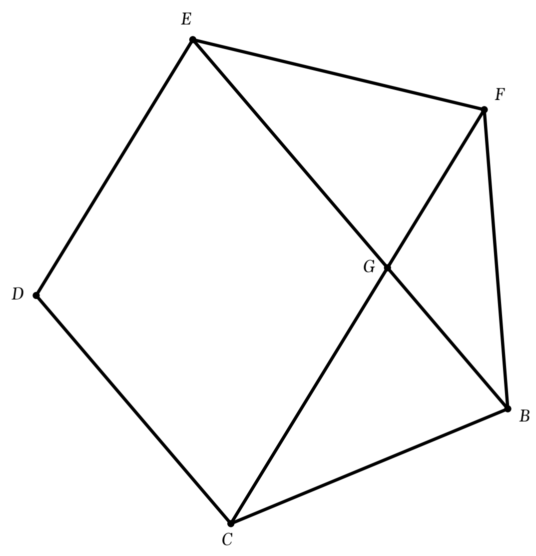

Рис. 22: золотое сечение в правильном пятиугольнике.

Правильный **семиугольник** не может быть построен циркулем и линейкой. Действительно, семёрка является простым числом, но не принадлежит к числам Ферма, так что условие (11) не выполняется.

Правильный **восьмиугольник** строится по центральному углу $45°$, который может быть получен делением пополам прямого угла (№5, №3) или, более просто, построением равнобедренного прямоугольного треугольника. На рис. 20 слева $\angle ADE = \angle ADE = 45°$.

Правильный **девятиугольник** не может быть построен циркулем и линейкой. Действительно, $9 = 3^2$, где степень тройки выше первой, и условие (11) не выполняется.

Правильный **десятиугольник** строится по центральному углу $36°$, который получается делением пополам угла $72°$ (№26, №3).

Правильный **одиннадцатиугольник** не может быть построен циркулем и линейкой (11 — простое число, но не число Ферма).

Правильный **двенадцатиугольник** строится по центральному углу $30°$, который получается делением пополам угла $60°$.

Правильные **тринадцатиугольник** и **четырнадцатиугольник** не могут быть построены циркулем и линейкой.

Правильный **пятнадцатиугольник** строится по центральному углу $24°$, который может быть найден из соотношения

$$24° = 60° - \tfrac{72°}{2}.$$

Нахождение углов $60°$ и $72°$ уже описывалось, в дальнейшем нужно применить к ним №3 и №13.

Остановим на этом последовательное увеличение числа углов — сказанного уже достаточно для понимания закономерности. Упомянем лишь три оставшихся простых числа Ферма: $17, 257, 65537$.

Для правильного **семнадцатиугольника** Гаусс нашёл следующую зависимость:

$$\cos\frac{360^\circ}{17} = \frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}}{16}, \tag{14}$$

откуда видно, что он действительно может быть построен циркулем и линейкой — непосредственное построение, конечно, слишком длинно и трудоёмко. Сравнительно несложный (хотя и всё равно не очень короткий) алгоритм опубликовал тридцать лет спустя в 1825 году Йоханнес Эрхингер; впоследствии появились и другие варианты. Желающих ознакомиться с ними можно отослать к [1, гл. VII §43].

Семь лет спустя, в 1832 году, Фридрих Ришело опубликовал построение правильного **257-угольника**. Описание занимает более десятка страниц и практически совершенно бесполезно.

Ещё более бесполезно построение правильного **65537-угольника**, которое к 1894 году разработал Йоханн Гермес за десять лет упорного труда. Его рукопись имела объём более 200 страниц, печатный же вариант по объёму превосходит эту статью примерно в два раза.

7.2. О доказательстве теоремы Гаусса—Ванцеля

Полное и строгое доказательство теоремы Гаусса—Ванцеля достаточно объёмно и требует привлечения математического аппарата, далеко выходящего за рамки школьного курса. Однако его *основная идея* вполне доступна для понимания старшеклассниками, и сейчас мы её проследим. При этом станет понятным происхождение соотношений типа (13) и (14).

Мы знаем уже, что угол на плоскости вполне однозначно строится по его синусу или косинусу; будем для определённости пользоваться косинусами.

Рассмотрим и преобразуем известную формулу для косинуса двойного угла, воспользовавшись попутно основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1.$$

Эту формулу можно записать и по-другому:

$$2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \cos x. \tag{15}$$

Итак, при известном $\cos x = T$ для построения половинного угла (т.е. его косинуса $\cos\frac{x}{2} = t$) необходимо решить квадратное уравнение $2t^2 = 1 + T$. Нам известно, что циркуль и линейка позволяют это.

Положим $x = 360^\circ$, тогда $T = \cos x = 1$ и $2t^2 = 2$. Это уравнение имеет два вещественных корня $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. Трактуя их как $t_1 = 1 = \cos 0^\circ$ и $t_2 = -1 = \cos 180^\circ$, получаем два угла, лучи которых делят полный круг пополам.

Аналогичным образом рассмотрим косинус тройного угла:

$$\cos 3x = \cos(2x + x) = \cos 2x\cos x - \sin 2x\sin x.$$

Применяя ранее найденное соотношение и известные тождества, получаем

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$$

или, что то же самое,

$$4\cos^3 \tfrac{x}{3} - 3\cos \tfrac{x}{3} = \cos x. \tag{16}$$

Для полного круга имеем кубическое уравнение $4t^3 - 3t = 1$ с очевидным корнем $t_1 = 1$. Сокращая на $t - 1$, приходим к квадратному уравнению с кратным корнем $t_2 = t_3 = -\frac{1}{2}$. Эти корни можно трактовать, как косинусы углов 0°, 120° и 240°, лучи которых делят полный круг на три части.

Далее, аналогично

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1,$$

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x \quad \text{и т.п.} \tag{17}$$

(Рекомендуется вывести эти тождества самостоятельно!)

Обобщая, получаем следующий факт: *геометрическая задача деления угла на некоторое количество равных частей алгебраически эквивалентна решению уравнения соответствующей степени.* Если полный угол 360° делится на n частей, то уравнение будет иметь n вещественных корней-косинусов, углы которых образуют звезду на вершины правильного n-угольника; одним из углов всегда будет нулевой[11].

Получающиеся уравнения в некоторых случаях будут иметь корнями геометрические числа, а в некоторых нет. Гауссу в 1796 году удалось показать, что выполнение условия (11) приводит к геометрическим корням. В частности, он нашёл корень (14) для $n = 17$ (и сделал семнадцатиугольник символом своего открытия).

Гораздо сложнее было доказать, что все иные случаи *не приводят* к геометрическим корням. Математика XVIII века просто не располагала такими методами «доказательства невозможности», и лишь в конце первой трети следующего XIX века норвежский математик Нильс Абель и француз Эварист Галуá заложили основы соответствующей теории, рассматривая свойства множества корней уравнения приразличных преобразованиях. Рассуждая схожим образом, Пьер Ванцель дополнил выводы Гаусса и доказал вторую часть теоремы.

7.3. О построении пятиугольника

Первое известное нам изложения точного метода построения правильного пятиугольника встречается у Эвклида в четвёртой книге «Начал». Конечно, едва ли авторство метода принадлежит именно Эвклиду, но вот как он описывает решение этой задачи.

В IV.10 рассматривается вспомогательная проблема: построение равнобедренного треугольника специального вида[12]:

> *Построить равнобедренный треугольник, имеющий каждый из углов при основании вдвое бóльшим остающегося.*
>
> Отложим некоторую прямую AB и рассечём её в точке C так, чтобы прямоугольник, заключённый между AB и BC, был равен квадрату на

[11]Этот факт обосновывается в теории функций комплексных переменных (ТФКП).

[12]Текст приводится по [2].

CA (II.11); и из центра A раствором AB опишем круг BDE и вставим в круг BDE прямую BD, равную прямой AC, не большей диаметра круга BDE (IV.1); и соединим AD. [*следует длинное доказательство*]

...значит, построен равнобедренный треугольник ABD, имеющий каждый из углов при основании вдвое бо́льшим остающегося, что и требовалось сделать.

Как видно, для построения такого треугольника требуется решить квадратное уравнение $AB \cdot BC = (AB - BC)^2$, для чего автор «Начал» ссылается на II.11. Фактически же это не что иное, как известное нам золотое сечение:

$$\frac{AB}{AB - BC} = \frac{AB - BC}{BC}.$$

Далее в IV.11 доказывается, что угол при основании составляет ровно пятую часть круга, и он используется собственно для построения пятиугольника. В наши дни это гораздо проще показать алгебраически. Действительно, пусть в таком треугольнике угол против основания составляет x, тогда каждый из углов при основании есть $2x$. Их сумма равна $x + 2x + 2x = 5x = 180°$. Отсюда $x = 36°$ и $2x = 72°$.

Альбрехт Дюрер, прекрасно знавший геометрические книги «Начал», считал такое построение слишком сложным и неудобным. Вместо него он включил в своё «Наставление к измерению циркулем и линейкой» приближённый, но гораздо более простой и наглядный метод с неизменным раствором циркуля.

Долгое время его авторство приписывали самому́ художнику (хотя он этого не утверждал), пока в конце XIX века не был найден более ранний анонимный трактат примерно 1484 года, ныне известный как «Geometria Deutsch». Автор сочинения, в отличие от Дюрера, полагал построение точным, и вот как он описывал его[13]:

Если кто хочет нарисовать пятиугольник с циркулем неизменного раствора, то раскрой циркуль настолько широко, сколько ты желаешь, и наметь [*этим раствором*] две точки A, B.

Затем оставь одно острие циркуля в точке A и проведи круг; точно так же оставь циркуль в точке B и проведи круг, и там, где один круг заходит за другой, наметь две точки C, D. Затем наложи линейку на точки C и D и проведи длинную черту через обе точки.

Затем помести острие циркуля в точку D и проведи круг через A, B, и там, где этот круг проходит через черту CD, наметь E. Затем посмотри, где этот самый круг заходит за круг DBH и наметь там F, точно так же на другой стороне наметь G. После этого наложи линейку на точку F и на E и проведи черту через эти точки до круга $DACG$ и наметь там точку K. Таким же образом на другой стороне наметь H. После этого помести циркуль в точку K и проведи круг, и где он заходит за линию DEC, наметь I. Затем проведи черту от I до K, от K до B, от B до A, от A до H, от H до I. Тогда ты получишь правильный пятиугольник, образец которого здесь приложен. (См. рис. 23)

[13]Приводится по [8] без каких-либо изменений.

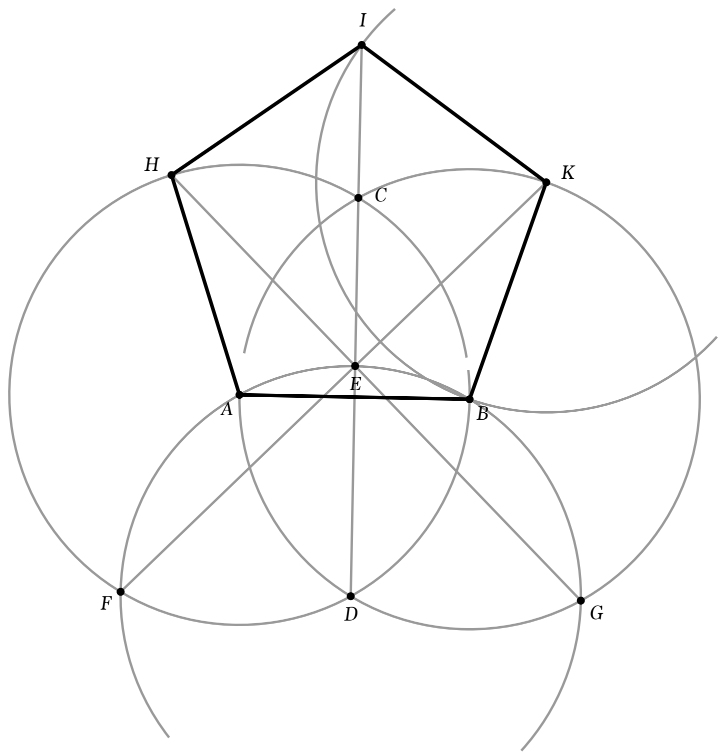

Рис. 23: «пятиугольник Дюрера».

«Пятиугольник Дюрера», безусловно, является равносторонним, но в действительности не является правильным. Вместо 108° его внешние углы составляют $107^\circ 2' 13''$ (при вершинах A, B), $108^\circ 22'$ (при вершинах H, K) и $109^\circ 11' 33''$ (при вершине I). Имеется интересная гипотеза, согласно которой *именно поэтому* в книгу было включено неточное построение: в те времена пятиугольник часто использовали для построения пентаграммы — магического и мистического символа, — и чтобы избежать возможных конфликтов с церковью, Дюрер вполне мог дать читателям рецепт, не воспроизводящий «истинные свойства» фигуры. Визуально же этот пятиугольник неотличим от правильного. В историю геометрии он так и вошёл под фамилией художника...

Современное построение пятиугольника, приведённое под №26, основано на соотношении (13). Рассмотрим его происхождение, вспомнив для этого тождество (17).

Полагая в нём $x = 72^\circ$ и обозначая $\cos 72^\circ = t$, получаем уравнение пятой степени

$$16t^5 - 20t^3 + 5t - 1 = 0.$$

Одним из его корней, как мы помним, является единица. Деля на $(t-1)$, приходим к выражению, которое является полным квадратом, и уравнение преобразуется к виду

$$(t-1)(4t^2+2t-1)^2=0.$$

Найти его корни не составляет труда:

$$t_1=1,\quad t_2=t_5=\frac{\sqrt{5}-1}{4},\quad t_3=t_4=-\frac{\sqrt{5}+1}{4}.$$

Это косинусы углов 0°, 72°, 144°, 216°, 288° — и один из них даёт соотношение (13).

(Кстати говоря, в построении 26 неявным образом получается «равнобедренный треугольник Эвклида» с углами 72°, 72°, 36°. На рис. 21 он образуется при сечении угла $\angle DAH$ отрезком DG.)

Обоснуем теперь №26. Положим для удобства, что радиус окружности $\mathfrak{A}$ равен двум, тогда $AB=AC=AD=AH=2$. Соответственно, $AF=1$.

По теореме Пифагора для первой окружности $FG=FD=\sqrt{AF^2+AD^2}=\sqrt{5}$. Тогда $AG=FG-AF=\sqrt{5}-1$. Снова применяя теорему Пифагора, для второй окружности получаем $DH=DG=\sqrt{AG^2+AD^2}=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$.

Итак, нам теперь известны все стороны треугольника $\triangle DAH$: $AD=AH=2$, $DH=\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. Воспользуемся для него теоремой косинусов:

$$DH^2=AD^2+AH^2-2\cdot AD\cdot AH\cdot\cos\angle DAH,$$

откуда нетрудно выразить

$$\cos\angle DAH=\frac{AD^2+AH^2-DH^2}{2\cdot AD\cdot AH}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Это в точности совпадает с (13), а значит, $\angle DAH=72°$.

8. Квадратура круга и приближённые построения

В геометрии циркуля и линейки известны «три великие задачи» древности, долгое время считавшиеся неразрешимыми, хотя доказать эту неразрешимость не удавалось. Вот они:

- **Трисекция угла** — по данному углу θ построить угол, составляющий его третью часть $\frac{\theta}{3}$;
- **Удвоение куба** — по данному кубу построить другой куб, имеющий вдвое больший объём;
- **Квадратура круга** — по данному кругу построить квадрат[14], имеющий равную с ним площадь.

[14]Слова «построить квадрат» не следует понимать буквально — математиков античности устраивала любая фигура, граница которой состояла из конечного числа отрезков. Её не составляло никакого труда разбить на треугольники и/или прямоугольники, по ним подсчитать суммарную площадь... после чего построение равновеликого квадрата было уже школярской задачей. Так, древнеегипетская квадратура круга (см. ниже) выражалась неправильным восьмиугольником, Архимед представил решение задачи о квадратуре параболы треугольником, и т.п.

Первая из этих задач, как мы уже знаем, сводится к решению уравнения третьей степени

$$4t^3 - 3t = \cos\theta,$$

вытекающего из (16), и последующего построения угла, косинус которого равен t.

Во второй задаче, положив сторону исходного куба равной x, получаем его объём равным x^3. Тогда объём искомого куба составит $2x^3$, а его сторона должна быть равна $x\sqrt[3]{2}$. Иными словами, удвоение куба сводится к построению величины $\sqrt[3]{2}$ или, что то же самое, к решению кубического уравнения

$$t^3 = 2.$$

Это очень близко к вопросу о построении правильных многоугольников (см. разд. 7.2), и знакомый нам Пьер Лоран Ванцель в 1837 году соответствующими методами доказал невозможность как трисекции угла, так и удвоения куба. Точнее, трисекция оказалась возможной лишь для *некоторых* углов — например, угол $\frac{360^\circ}{n}$ может быть разделен натрое лишь тогда, когда число n не кратно трём.

Вопрос о квадратуре круга оказался намного более сложным. Пусть радиус круга равен R, тогда его площадь S составляет πR^2, а сторона равновеликого квадрата должна быть равна $R\sqrt{\pi}$. Умножение и извлечение квадратного корня выполнимы циркулем и линейкой, так что задача сводится к построению числа π.

Только в 1896 году Фердинанд фон Линдеман сумел доказать, что эта знаменитая константа *не является корнем никакого алгебраического уравнения*, а потому не может быть построена циркулем и линейкой. Предыдущие века развития математики породили множество приближённых построений и различных историй — от смешных до трагических. Сам термин «квадратура круга» стал символом нерешаемой задачи.

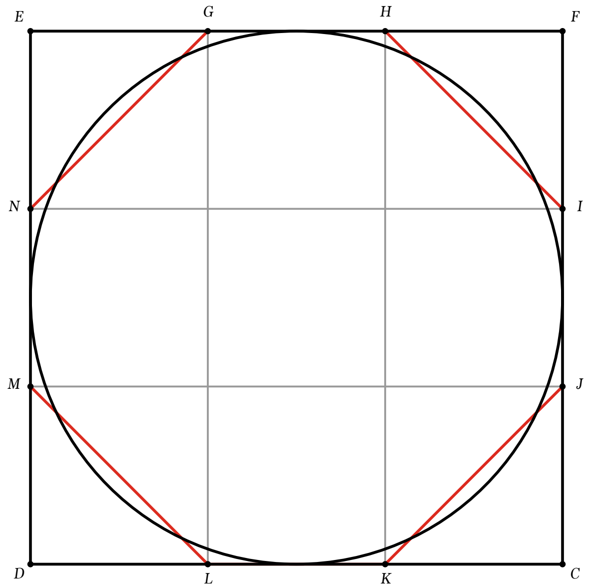

Рис. 24: древнеегипетская квадратура круга.

Самым ранним приближённым решением является древнеегипетское, приведённое в так называемом *папирусе Ахмеса* (оригинал текста восходит примерно к XIX в. до н.э.); его можно видеть на рис. 24. Из чертежа следует, что тогдашние геометры полагали площадь круга равной $\frac{7}{9}$ площади квадрата, построенного на диаметре этого круга.

Несколько менее известен древнеиндийский вариант, изображённый на рис. 25 и относящийся примерно ко II в. до н.э. Согласно этому построению, необходимо провести диаметр окружности AB, затем перпендикулярный к нему радиус OD, разделить его пополам точкой E и провести через эту точку хорду BF. Она будет являться стороной искомого квадрата $BFHI$, который строится тем более легко, что угол $\angle AFB$, согласно теореме 2, является прямым.

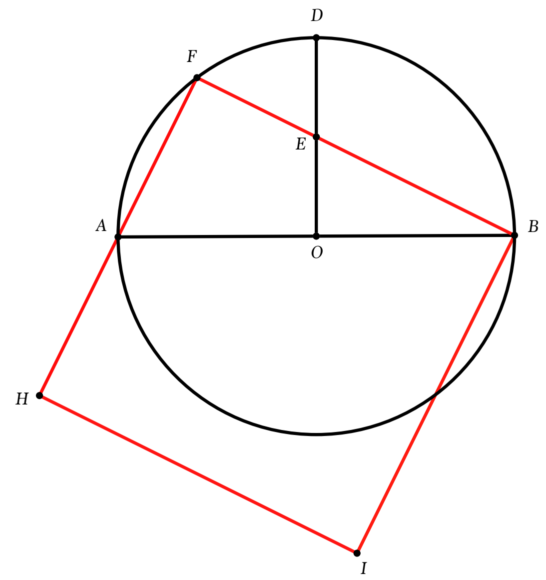

Рис. 25: древнеиндийская квадратура круга.

8.1. Геометрические приближения числа π

Записывая древнеегипетскую квадратуру современным математическим языком, мы получим приближённую формулу площади круга

$$S \approx \frac{7(2R)^2}{9} = \frac{28}{9}R^2.$$

Сопоставляя её с известным нам $S = \pi R^2$, можно видеть, что египтяне неявно пользовались приближением

$$\pi \approx \pi_0 = \frac{28}{9} = 3.1(1)$$

Именно так — по точности приближения числа π — удобно оценивать точность решения задач, связанных с квадратурой круга. (Рекомендуется проделать это самостоятельно для рис. 25.)

Следующим известным приближением является архимедово, найденное им в трактате «Измерение круга» [4]. Вот как он сам выразил этот результат:

> Периметр всякого круга равен утроенному диаметру с избытком, который меньше седьмой части диаметра, но больше десяти семьдесят первых.

Если условиться обозначать длину окружности радиуса R буквой L (точное значение $L = 2\pi R$), то в привычных нам обозначениях высказывание Архимеда означает, что

$$3 \cdot 2R + \frac{10 \cdot 2R}{71} < L < 3 \cdot 2R + \frac{2R}{7},$$

откуда $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Верхнюю границу этой оценки учёный рекомендовал использовать вместо π в практических вычислениях; это число так и называют архимедовым:

$$\pi \approx \pi_1 = \frac{22}{7} = 3.(142857).$$

Сам того не подозревая, Архимед сыграл очень злую шутку над многими последующими поколениями математиков. Предложив метод приближений, позволяющий находить всё более и более точные значения π, он в то же время строго показал, что для сегмента параболы аналогичный метод даёт в пределе вполне конкретное рациональное выражение[15]. Поскольку парабола, так же как и окружность, является коническим сечением[16], это давало основание ожидать, что задача о квадратуре круга также разрешима...

За следующие века было предпринято немало попыток, своеобразный итог которым подвёл аль-Хорезми в своей «Краткой книге об исчислении алгебры и алмукабалы» [5]:

> Каждый круг таков, что если ты умножишь диаметр на три и одну седьмую, получится окружность, ограничивающая его. Это выражение не единственно. У геометров по этому вопросу имеются два других выражения. Одно из них: ты умножишь диаметр на равное ему и на десять и извлечёшь корень из того, что получилось, получится окружность. Второе выражение — астрономов: ты умножаешь диаметр на шестьдесят две тысячи восемьсот тридцать два, а затем делишь его на двадцать тысяч, тогда частное — это окружность. Всё это близко друг к другу. Если разделить окружность на три и одну седьмую, получится диаметр.
>
> Каждый круг таков, что половина диаметра, умноженная на половину окружности — его площадь, так как всякий многоугольник с равными углами и сторонами, как треугольник, квадрат, пятиугольник и т.д., таков,

[15]Цитируя трактат «Квадратура параболы» [4] — «Всякий сегмент, заключённый между прямой и параболой, составляет четыре трети треугольника, имеющего с сегментом то же самое основание и равную высоту».

[16]Окружность получается при сечении конуса плоскостью, перпендикулярной его оси, парабола — плоскостью, параллельной образующей конуса.

что если ты умножишь половину его обвода на половину диаметра наибольшего круга, вписанного в него, то получится его площадь. Каждый круг таков, что если ты умножишь его диаметр на себя и вычтешь из этого [его] одну седьмую и половину одной седьмой, получится его площадь, соответствующая первому правилу.

В первом абзаце упоминаются три приближения для π, одним из которых является архимедово π_1. Два других

$$\pi \approx \pi_2 = \sqrt{10} \approx 3.16227,$$

$$\pi \approx \pi_3 = \frac{62832}{20000} = \frac{3927}{1250} = 3.1416$$

имеют индийское происхождение. π_2 было предложено в VII в. н.э. Брахмагуптой, π_3 — в V в. н.э. Арьябхаттой.

Второй абзац не менее интересен. В нём приводится совершенно точная формула площади круга по его радиусу и длине окружности

$$S = \frac{L}{2} \cdot R$$

вместе с краткой информацией о «выводе» этой формулы. Остановимся на ней подробнее.

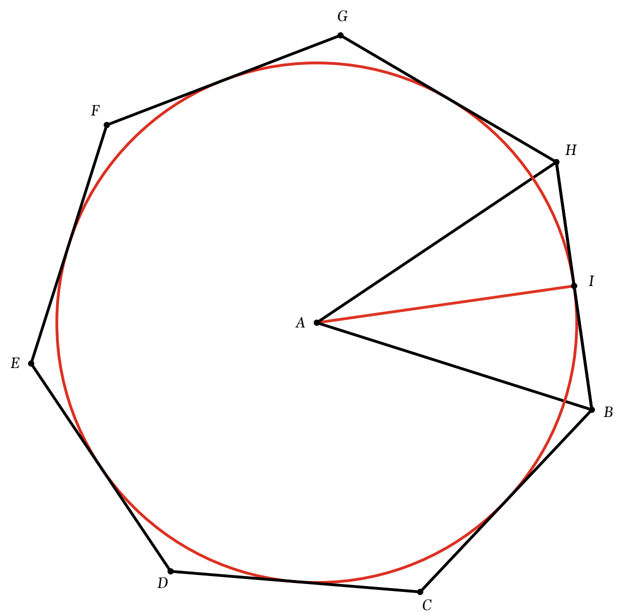

Рис. 26: площадь многоугольника по аль-Хорезми.

Рассмотрим правильный n-угольник, впишем в него окружность и соединим её центр с двумя соседними вершинами (рис. 26, на котором изображён случай $n = 7$).

Площадь образовавшегося треугольника составляет $\frac{1}{2} \cdot BH \cdot AI$, а площадь всего многоугольника, соответственно, $\frac{n}{2} \cdot BH \cdot AI$. Но $\frac{n \cdot BH}{2}$ есть его полупериметр («половина обвода»), а AI — радиус («половина диаметра») вписанной окружности.

Круг для аль-Хорезми и его современников является «идеально правильным» многоугольником, для которого должна иметь место та же закономерность, и именно отсюда следует процитированное утверждение.

Все названные приближения π являются геометрическими числами и легко строятся — особенно вариант Брахмагупты[17] (на основании равенства $10 = 3^2 + 1^1$ с применением №18) — однако аль-Хорезми не мог знать самого замечательного из подобных приближений. Без его упоминания наш рассказ был бы неполным.

Речь идёт о китайском рациональном приближении, найденном в V в. н.э. астрономом Цзу Чунчжи:

$$\pi \approx \pi_4 = \frac{355}{113} = 3.14159292...$$

Оно даёт великолепную точность, которой даже и сегодня более чем достаточно для любых инженерных приложений. Оценить её можно по следующему простому примеру.

Пусть имеется круг радиусом один километр. Предположим, что для него удалось каким-то образом построить истинную квадратуру, а затем была построена квадратура на основании приближения π_4. Стороны двух получившихся квадратов будут отличаться менее чем на десятую долю миллиметра!

Если выделить из дроби целую часть, то $\pi_4 = 3\frac{16}{113}$. Будучи рациональным числом, оно строится без особого труда, но требует при этом 113-кратного откладывания единичного отрезка, что на практике вносит значительную погрешность. Существует, впрочем, гораздо более быстрое и компактное...

Построение 27. *Построить отрезок, длина которого составляет* $\pi_4 = 3\frac{16}{113}$.

Алгоритм. Пользуясь №5, построить прямой угол с вершиной O. Отложить на его сторонах отрезки $OA = OB = 1$.

Пользуясь №3, построить отрезки $OC = \frac{7}{8}$ и $BD = \frac{1}{2}$. Провести отрезок BC. Отложить на него точкой E длину $BE = BD = \frac{1}{2}$.

Пользуясь №2, построить через точку E перпендикуляр к OB. Точку его пересечения с этим отрезком обозначить F. Провести отрезок CF.

Пользуясь №6, построить через точку E прямую, параллельную CF. Точку её пересечения с OB обозначить G.

Длина отрезка BG составляет $\frac{16}{113}$, то есть дробную часть π_4. Пользуясь №12, трижды сложить BG с единичным отрезком. (См. рис. 27) □

Обоснуем этот результат. Прежде всего заметим равенство углов: $\angle OFC = \angle FGE$ и $\angle OBC = \angle FBE$.

По катетам $OC = \frac{7}{8}$ и $OB = 1$ найдём гипотенузу BC:

$$BC = \sqrt{OC^2 + OB^2} = \frac{\sqrt{113}}{8}.$$

[17] Это приближение не очень точно, однако наряду с лёгкостью запоминания и построения имеет существенное достоинство: оно изображает π с «хорошим небольшим избытком», что удобно при строительно-архитектурных приложениях.

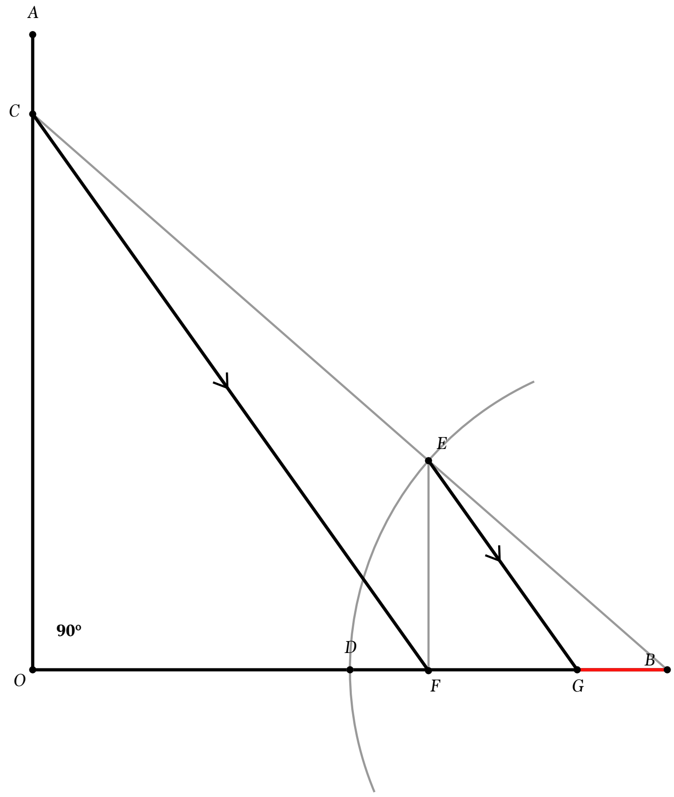

Рис. 27: к построению 27 (приближение Цзу Чунчжи).

Отсюда $\cos\angle OBC = \frac{8}{\sqrt{113}}$, $\sin\angle OBC = \frac{7}{\sqrt{113}}$. С учётом $BE = BD = \frac{1}{2}$ получаем

$$BF = BE \cdot \cos\angle FBE = \frac{1}{\sqrt{113}},$$

$$EF = BE \cdot \sin\angle FBE = \frac{7}{2\sqrt{113}}.$$

Далее,

$$\operatorname{tg}\angle FGE = \operatorname{tg}\angle OFC = \frac{OC}{OF} = \frac{OC}{OB - FB} = \frac{7\sqrt{113}}{8(\sqrt{113}-4)} = \frac{EF}{FG},$$

откуда

$$FG = \frac{EF}{\operatorname{tg}\angle FGE} = \frac{4(\sqrt{113}-4)}{113} = \frac{4}{\sqrt{113}} - \frac{16}{113}.$$

Окончательно, $BG = BF - FG = \frac{16}{113}$, что и требовалось доказать.

Завершим этот раздел двумя курьёзами. Первый из них связан с константой золотого сечения (2), на основе которой можно построить очень неплохое приближение

$$\pi \approx \pi_5 = \frac{6}{5\varphi^2} = 3.14164...$$

В истории математики зафиксированы случаи, когда на полном серьёзе предпринимались попытки объявить именно это число точным значением π — вплоть до середины XX века! Никаких обоснований, кроме «должна быть гармония» при этом не выдвигалось.

Второй курьёз относится к началу 1970-х годов, когда во времена СССР полулитровая бутылка водки «Столичная» стоила 1.49 руб., а бутылка 0.75 литра — 2.87 руб. При возведении одного числа в степень, равную второму, получалось...

$$1.49^{2.87} = 3.140831... \approx \pi.$$

Ошибка составляет менее 0.0008, а с учётом того, что копейка есть 0.01 рубля и меньших долей просто не предусмотрено, можно говорить о тождестве.

8.2. Задача о спрямлении дуги

Как давно известно[18], площадь круга связана с квадратом радиуса через ту же самую константу, которая связывает длину окружности с диаметром:

$$\frac{S}{R^2} = \pi = \frac{L}{2R}.$$

Этот факт в своё время дал ложные надежды великому множеству искателей квадратуры круга.

Действительно, если для квадратуры требуется построить отрезок длиной π, то можно взять окружность единичного радиуса и *спрямить* её половину — т.е., найти отрезок, длина которого совпадает с длиной полуокружности. Интуитивно эта задача кажется гораздо более простой, нежели построение абстрактной константы непонятной природы.

Процитируем [9, гл. 41]:

> Тысячи людей, бившихся над решением задачи о квадратуре круга, были уверены, что им удалось построить отрезок, длина которого в точности равна π, но никто из них не смог превзойти английского философа Томаса Гоббса, в котором высокий интеллект сочетался с глубочайшим невежеством.

Характерной особенностью подобных «трудов» было то, что все предлагаемые построения разрабатывались исключительно «на глаз», и их авторы не могли представить никаких обоснований, кроме «разве это не очевидно?!» и «замер по большому чертежу подтверждает».

Попробуем поставить себя на место математика второй половины XVII века и разобрать лучшее из построений Гоббса, изображённое на рис. 28.

Прежде всего требовалось построить квадрат $ABCD$ с единичной стороной (см. разд. 7.1). Затем проводились окружности $\mathfrak{A} = \langle A, 1\rangle$ и $\mathfrak{B} = \langle D, 1\rangle$, а точка их пересечения, лежащая внутри квадрата, обозначалась F.

Угол $\angle BAF$ (составляющий, как легко видеть, $30°$, т.е. шестую часть полуокружности) делился пополам, и точка пересечения биссектрисы с окружностью $\mathfrak{A}$ обозначалась Q.

[18]См., например, последнюю фразу цитаты из аль-Хорезми в предыдущем разделе.

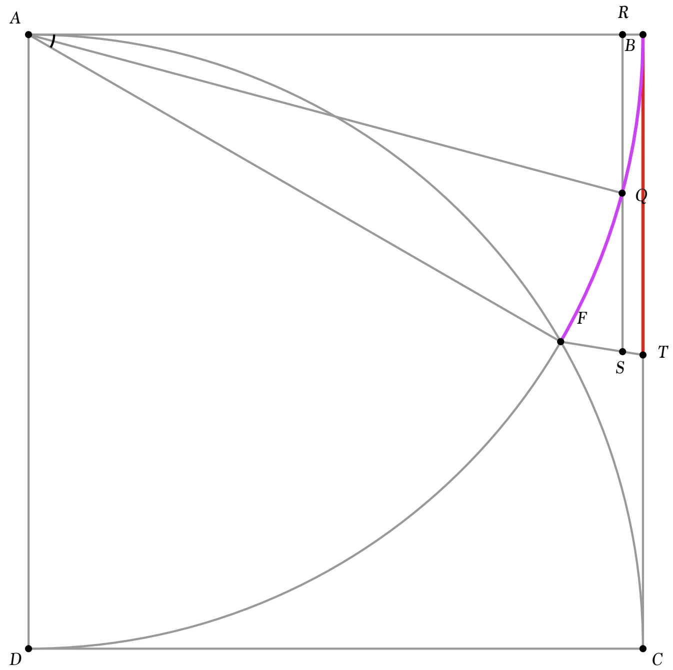

Рис. 28: построение «спрямления дуги» $\frac{\pi}{6}$ по Гоббсу.

Из этой точки опускался перпендикуляр на отрезок AB в точку R. На его продолжении строилась точка S такая, что $QS = QR$.

Через F и S проводилась прямая до пересечения со стороной квадрата BC в точке T. Длина отрезка BT, по утверждению Гоббса, в точности совпадала с длиной дуги BF, и составляла, таким образом, $\frac{\pi}{6}$. Её шестикратное повторение якобы давало отрезок длиной π.

Чтобы оценить неточность этого построения, нам понадобятся дополнительные точки на чертеже. Опустим из точки F перпендикуляры на стороны квадрата AB и BC — в точки X и Y соответственно. Точку пересечения второго из них (FY) с отрезком QS обозначим Z. Соответствующий фрагмент чертежа, развёрнутый для удобства против часовой стрелки, приведён на рис. 29.

Как мы помним, $\angle BAF = \angle FAR = 30°$. Тогда $\angle QAR$, составляющий его половину, имеет величину $15°$. Ранее полученное тождество (15) позволяет найти его синус и косинус:

$$\cos \angle QAR = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

$$\sin \angle QAR = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

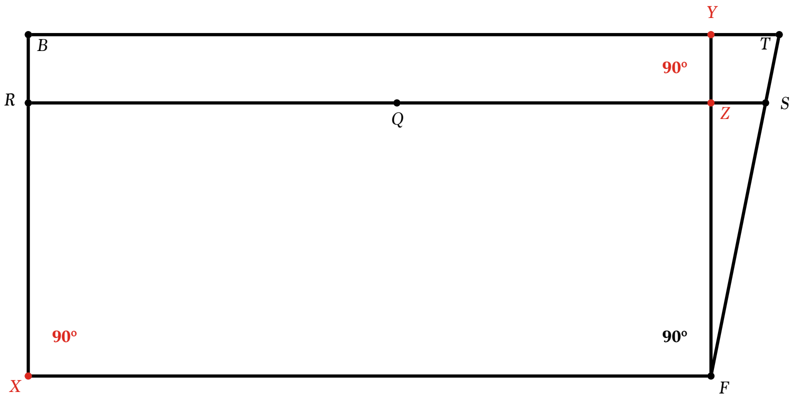

Рис. 29: к построению Гоббса.

Рассматривая прямоугольные треугольники $\triangle FAX$ и $\triangle QAR$, находим:

$$AX = \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad FX = BY = RZ = \frac{1}{2}.$$

$$AR = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}, \qquad QR = QS = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}, \qquad RS = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

Далее,

$$ZS = RS - RZ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-1}{2}.$$

Найдём теперь длину отрезка BT, который являлся целью построения:

$$BT = BY + YT = FX + YT.$$

Нам уже известно FX, а YT можно найти из подобия треугольников $\triangle FSZ$ и $\triangle FTY$:

$$\frac{YT}{ZS} = \frac{FY}{FZ} \quad \Longrightarrow \quad YT = \frac{FY}{FZ} \cdot ZS.$$

Нахождение FY и FZ не составляет труда:

$$FY = BX = AB - AX = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2-\sqrt{3}}{2},$$

$$FZ = AR - AX = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}+1-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}}.$$

Окончательно,

$$BT = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}-6}{\sqrt{3}+1-\sqrt{6}} \cdot \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}-1}{2}.$$

Нехитрые арифметические преобразования дают более простой вид этого выражения:

$$BT = \frac{4\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - 7\sqrt{2} - 3}{4} = 0.5236541143...$$

Умножая на шесть, получаем, что построение Гоббса приводит к

$$\pi \approx \pi_6 = 3.14192468584...$$

В XVII веке число π по методу последовательных приближений Архимеда было найдено уже с довольно большой точностью, и можно видеть, что π_6 содержит лишь три верных знака...

Из результата фон Линдемана следует, что задача о квадратуре круга, о спрямлении дуги, а равно и *любая другая задача*, сводящаяся к построению числа π, *в принципе неразрешимы с помощью циркуля и линейки*. К этому утверждению, впрочем, нужно сделать уточнение: неразрешимы *за конечное число действий*.

Мы закончим этот рассказ построением, которое не даёт спрямления дуги, но *сходится* к нему. Иными словами, каждое следующее повторение указанных действий даёт результат, всё более и более близкий к истинному.

Построение 28. *По заданной дуге окружности построить с любой степенью точности отрезок отрезок равной длины.*

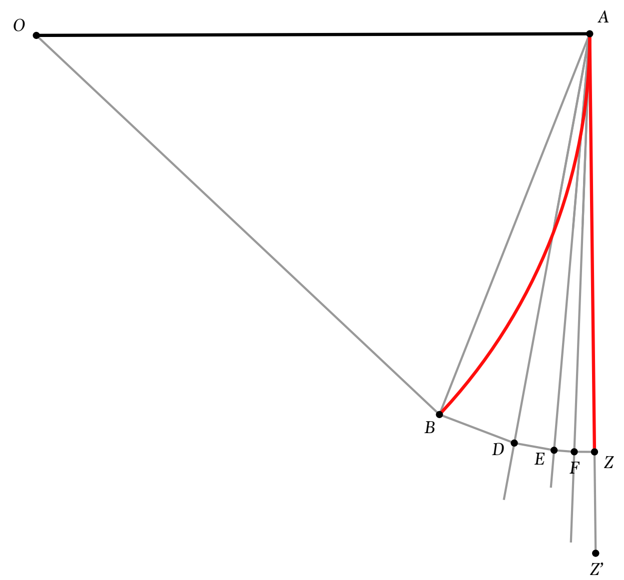

Рис. 30: к построению 28 (спрямление дуги).

Алгоритм. Пусть имеется дуга окружности AB. Провести хорду AB. Провести отрезки OA и OB, соединяющие концы дуги с центром её окружности O.

Пользуясь №2, построить перпендикуляр AZ' к OA через точку A.

Построить перпендикуляр к хорде AB и биссектрису угла $\angle BAZ$. Точку их пересечения обозначить D.

Построить перпендикуляр к хорде AD и биссектрису угла $\angle DAZ$. Точку их пересечения обозначить E.

Построить перпендикуляр к хорде AE и биссектрису угла $\angle EAZ$. Точку их пересечения обозначить F.

Этот процесс повторяется столько раз, сколько нужно, или пока позволяет точность инструментов/чертежа. **Точка пересечения Z прямой AZ' с последним построенным перпендикуляром отстоит от A на расстояние, совпадающее (в пределах точности) с длиной дуги AB.** (См. рис. 30) □

Рассматривая это построение, удобно считать радиус окружности единичным ($OA = OB = 1$) и пользоваться радианной мерой угла. Как известно, для единичной окружности длина дуги совпадёт с радианной величиной отсекающего её угла. Пусть $\angle AOB = x$, тогда и $\overset{\frown}{AB} = x$.

Отрезок AB является основанием равнобедренного треугольника $\triangle AOB$ с едничной боковой стороной, лежащим против угла величины x. Нетрудно найти его длину:

$$AB = 2\sin\tfrac{x}{2}.$$

Угол $\angle OAB$ при этом основании оказывается равным

$$\angle OAB = \frac{\pi - x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}.$$

Соответственно, угол $\angle BAZ'$, как дополняющий его до прямого, имеет величину $\angle BAZ' = \frac{x}{2}$.

В прямоугольном треугольнике $\angle ABD$ отрезок AB оказывается катетом при угле, равном половине этой величины. Тогда длина гипотенузы AD составляет

$$AD = \frac{AB}{\cos\angle BAD} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{4}}.$$

В свою очередь, AD оказывается катетом прямоугольного треугольника $\triangle ADE$, острый угол при котором становится еще вдвое меньше. Гипотенузой является AE:

$$AE = \frac{AD}{\cos\angle DAE} = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{4}\cdot\cos\frac{x}{8}}.$$

Продолжая рассуждать аналогичным образом, получаем, что после n-кратного построения точки пересечения «перпендикуляр-биссектриса» очередной отрезок будет иметь длину

$$X_n = \frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos(\frac{x}{4})\cdot\cos(\frac{x}{8})\cdots\cos(\frac{x}{2^{n+1}})}.$$

Числовые последовательности и их пределы не рассматриваются в школьном курсе математики, поэтому здесь мы ограничимся упоминанием того, что при $n\to\infty$ имеет место сходимость $X_n \to x = \widetilde{AB}$ — т.е., разность $(X_n - x)$ уменьшается с ростом n так, что постепенно делается меньше всякого наперёд заданного положительного числа.

Достоинством данного построения является тот факт, что оно позволяет построить спрямление с любой степенью точности для дуги любого радиуса и любой угловой величины.

Заключение

«Геометрия» в буквальном переводе с греческого означает «землемерие», и прообразами идеальных инструментов циркуля и линейки, по-видимому, послужили вполне реальные средства — для проведения прямых землемеры пользовались простой верёвкой, натягивая её между двумя точками, а циркулем им служила та же верёвка, привязанная к вбитому в землю колышку.

Разумеется, учёные-математики не ограничивались этим инструментарием — особенно после того, как стала очевидной связь между геометрическими построениями и вопросами алгебры. Ниже мы кратко опишем несколько наиболее известных альтернативных геометрических систем. Слова «выполнимы все традиционные построения» следует понимать в смысле «любая точка, которую можно построить циркулем и линейкой, может быть построена и этим способом».

«Построения ржавым циркулем». Предполагается, что раствор циркуля установлен раз навсегда и не может быть изменён. Использование линейки не отличается от традиционного.

При кажущейся искусственности этого ограничения оно в действительности носит чисто практический характер. Циркуль неизменного раствора намного проще в изготовлении и не вносит погрешностей (не разбалтывается) при многократном использовании.

Доказано (теорема Штейнера), что в рамках данной системы возможны любые построения, выполнимые традиционным способом. Наиболее нетривиальной задачей является откладывание отрезков произвольной длины. Подробнее см. в [1, гл. II, §13].

Построения одной линейкой. Если использование циркуля запрещено, то возможности одной линейки оказываются крайне ограниченными (нельзя даже разделить отрезок пополам).

Однако если на линейке имеются две отметки (с произвольным расстоянием между ними), то все традиционные построения выполнимы. Этот результат опирается на открытие, сделанное французским императором Наполеоном I Бонапартом[19]: при помощи линейки с двумя отметками может быть построен квадрат.

Разумеется, линейкой нельзя нарисовать окружность, но если для окружности известен центр и радиус, то можно найти точки её пересечения с прямой или с другой окружностью; этого оказывается вполне достаточно. Подробнее см. в [1, гл. II, §12].

Построения одним циркулем. Оказывается, что при запрете на использование линейки все традиционные построения оказываются выполнимы и одним циркулем

[19]Будучи по образованию офицером-артиллеристом, Наполеон прекрасно знал и любил математику. Это ему принадлежит знаменитая фраза о том, что «вместо проповедей и катехизиса народу нужен маленький курс геометрии».

(теорема Мора—Маскерони)! Для этого, впрочем, необходима возможность изменения раствора циркуля.

Циркулем нельзя провести прямую линию, поэтому считается, что прямая задана двумя своими точками. При этом оказывается возможным нахождение точек пересечения «прямая-прямая» (довольно нетривиальная задача!) и «прямая-окружность». Подробнее см. в [1, гл. III].

Построения циркулем и линейкой с отметками. Расширение традиционной системы, при котором на линейке разрешается делать отметки, замеряя расстояния по чертежу. Сразу же понятно, что все традиционные построения выполнимы.

Дополнительно оказывается возможным специальный приём, который древнегреческие математики называли словом «невсис». Суть невсиса заключается в следующем: разместить между двумя линиями чертежа отрезок заданной длины так, чтобы его концы лежали на этих линиях, а продолжение проходило через заданную точку.

Невсис значительно расширяет возможности построений. Так, Архимед предложил простую и точную трисекцию произвольного угла на основе этого приёма (см. предложение VIII «Книги лемм» [4] или, например, [6, гл. III, ч.1, §3.3]).

Оригами-построения. Совершенно новая геометрическая система, предложенная и исследованная в XX веке. Интересна тем, что не предполагает использования каких-либо инструментов — вместо этого предусмотрена лишь одна операция над чертежом в целом. Допускается складывание чертежа вдоль любой прямой линии.

Каждая такая складка задаёт соответствующую прямую, а пересечение складок — точку. Основная идея заключается в том, что алгоритм складывания строится на совмещениях линий и точек. Все возможные способы совмещений описываются семью так называемыми правилами Фудзиты.

Несмотря на кажущуюся примитивность, оригами имеет гораздо бо́льшие возможности по сравнению с циркулем и линейкой. Доказано, что правила Фудзиты допускают решение уравнений не только первого-второго, но и третьего порядка — а следовательно, оказываются осуществимыми такие операции, как трисекция угла и удвоение куба. Кроме того, можно строить некоторые правильные многоугольники, не строящиеся циркулем и линейкой (например, семиугольник и девятиугольник). Задача о квадратуре круга, впрочем, продолжает оставаться неразрешимой.

Все традиционные построения выполнимы средствами оригами — с необходимой оговоркой, что окружности приходится задавать их центрами и радиусами. Довольно сложной, хотя и решаемой, задачей оказывается нахождение точек пересечения двух окружностей.

Список литературы

[1] *А. Адлер* **Теория геометрических построений**. — Л.: Учебно-педагогическое изд-во Наркомпроса РСФСР, 1940.

[2] **Начала Эвклида, книги I–VI** / Серия «Классики естествознания». — М., Л.: Гос. изд-во технико-теоретической лит-ры, 1948.

[3] *Омар Хайям* **Трактаты** /«Памятники литературы народов Востока», малая серия. — М.: Изд-во восточной литературы, 1961.

[4] *Архимед* **Сочинения**. — М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1962.

[5] *Мухаммад ибн Муса аль-Хорезми* **Математические трактаты**. — Ташкент: Изд-во «ФАН» УзССР, 1983.

[6] *Р. Курант, Г. Роббинс* **Что такое математика? Элементарный очерк идей и методов**. — М: МЦНМО, 2007.

[7] *Я. Перельман* **Живой учебник геометрии**. — М.: АСТ, Астрель, 2009.

[8] *Г. Вилейтнер* **Хрестоматия по истории математики, составленная по первоисточникам**. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010.

[9] *М. Гарднер* **Математические головоломки и развлечения**. — М.: АСТ, ЗебраЕ, 2010.