
Финансовые пирамиды

Михаил Баландин michael.balandin@live.ru

Я предлагаю вам поиграть в интересную игру сáмого что ни на есть практического плана. Именно такие игрища лежали в основе наиболее масштабного и впечатляющего лохотрона постсоветской эпохи — приснопамятного «АО МММ» (февраль–август 1994 года). Именно в эту игру Россия чуть позже доигралась на внутреннем рынке государственных краткосрочных обязательств (ГКО) до августовского дефолта 1998 года. Имя игре — *финансовая пирамида*.

Мы с вами, как люди умные, не будем производить натуральных экспериментов. Специально для таких случаев есть могучий инструмент — называется *математическое моделирование*. Не беспокойтесь, ничего сложного не будет, и никаких специальных знаний не потребуется. Модель, которую я здесь хочу показать, является простенькой и почти игрушечной... однако динамику развития пирамид она вполне отражает.

Идея финансовой пирамиды заключается в следующем. Основатель (далее — *игрун*) выпускает «ценные бумаги» (далее — *акции*), на которые сам же регулярно заявляет курсы покупки и продажи (последний, разумеется, немного повыше первого). Подобная политика называется *самокопировкой*. Эти курсы постоянно растут, так что всего через несколько дней после покупки можно продать бумаги и уже тогда получить прибыль. Чем больше покупатель (*клиент пирамиды*) держит *акции* у себя, откладывая их продажу, тем бóльшую прибыль он в итоге получит. Звучит просто и красиво, однако есть большая проблема. Деньги, как известно, не берутся из ниоткуда! Зато они очень даже могут исчезнуть в никуда — вместе с *игруном*, который, как это ни странно, интересуется главным образом *своей* прибылью, а на остальных ему глубоко безразлично.

Давайте прежде всего сформулируем начальные данные. Допустим, дело у нас происходит в крупном городе с миллионным населением: $N = 1000000$. Количество денег в кассе пирамиды в день i будем обозначать M_i . Разумеется, чтобы организовать пирамиду, *игрун* должен вложить в неё стартовый капитал. Пусть эти вложения составляют десять миллионов рублей, и именно эта сумма находится в кассе на первый день: $M_1 = 10000000$. Каждый день из кассы уходит некоторая сумма на текущие расходы по поддержанию пирамиды в рабочем состоянии (реклама, зарплата персоналу, «крыша», аренда офиса и т.п.). Положим, что эти ежедневные расходы постоянны и составляют $t = 300000$ рублей.

А что у нас с курсом *акций*? Ну, скажем, *игрун* установил начальный курс продажи в 215 рублей, а начальный курс покупки в 200 рублей. Эти курсы будут стабильно и постоянно повышаться — допустим, каждый день на три рубля. Опишем курс продажи функцией $P_s(i)$, а курс покупки — функцией $P_b(i)$:

$$\begin{aligned}P_b(i) &= 200 + 3(i - 1); \\P_s(i) &= 215 + 3(i - 1).\end{aligned}$$

Количество людей, купивших *акции* в день i , будем обозначать B_i , а продавших — S_i . Предположим, в первый день удалось впарить *акции* десятку человек, так что $B_1 = 10$.

А вот теперь-то и начинается самое интересное. Мы переходим к построению собственно математической модели пирамиды.

Наиболее важный и тонкий момент заключается в следующем: *а какова будет динамика изменения числа клиентов пирамиды — покупателей и продавцов акций?*

Здесь мы не станем изобретать велосипед. Предположим, что ажиотаж среди жителей города, которые постепенно становятся клиентами, изменяется по тем же законам, по которым происходит развитие инфекционных заболеваний. Те, кто уже попал в число клиентов, являются аналогами заболевших. Подобно тому, как заболевшие люди заражают здоровых, они помогают вовлекать в пирамиду тех, кто ещё не охвачен. Свою часть работы, разумеется, делает и реклама. А по мере того, как число неохваченных пирамидой людей в городе становится всё меньше, и количество новых клиентов начинает уменьшаться.

В простейших моделях математической экологии принимается, что количество заболевающих каждый день прямо пропорционально произведению двух величин. Числу особей в популяции, *которые уже переболели*, на число *ещё не болевших особей*. В целом это звучит достаточно логично, именно так, как описано в предыдущем абзаце. Сначала переболевших мало, и процесс распространения инфекции идёт довольно медленно. Своего пика он достигнет, когда переболевших и не ещё болевших будет примерно поровну, а затем пойдёт на спад. Получается такая квадратичная парабола, выпуклая вверх.

Вот пусть и у нас развитие пирамиды протекает по закону развития эпидемий. Значит, нам придётся учитывать *общее число людей, купивших акции*. Это легко: если обозначить данное число к i -му дню за T_i , то

$$\begin{aligned} T_1 &= 0; \\ T_{i+1} &= T_i + B_i. \end{aligned}$$

Ну, а ежедневное количество покупателей акции в соответствии с вышесказанным будет выражаться формулой

$$B_{i+1} = K \cdot T_i \cdot (N - T_i).$$

Коэффициент пропорциональности K можно взять из тех же экологических моделей. Так, например, $K = 4 \cdot 10^{-7}$ соответствует развитию туляремии среди грызунов. ☺ И на самом деле здесь нужна ещё «заглушка», чтобы T_i не могло превысить N , а B_i не могло стать меньше нуля. С учётом этого предыдущая формула немного меняется:

$$B_{i+1} = \max\{0, K \cdot T_i \cdot (N - T_i)\}.$$

Второй очень важный момент: а по какому принципу люди будут *продавать* ранее купленные ими *акции*? Здесь поступим просто: будем считать, что каждый купивший принесёт их обратно через некоторое фиксированное число дней. В реальности оно определяется жадностью и степенью доверия клиента к пирамиде, формируемого рекламой и публичными акциями *игруна*. Допустим, этот интервал между покупкой и продажей составляет $\Delta = 45$ дней. Соответственно, S_i приобретает вид

$$S_{i+1} = \begin{cases} 0, & i < \Delta \\ B_{i+1-\Delta}, & i \geq \Delta \end{cases}.$$

Это означает, что волна продавцов в точности повторит волну покупателей с Δ -запаздыванием.

Вот, практически, и всё. Осталось записать только самый главный закон изменения количества денег в кассе. Тут довольно очевидно: нужно убрать из кассы сумму ежедневных расходов m , прибавить доход от продажи *акций* и вычесть сумму, выданную клиентам, принёсшим *акции* обратно:

$$M_{i+1} = M_i - m + B_i \cdot P_s(i) - S_i \cdot P_b(i).$$

Готово! Давайте теперь запишем все формулы вместе для более удобного восприятия.

Начальные данные	Динамика развития пирамиды: $i = 1, 2, 3, \dots$
$N = 1000000$	$T_1 = 0$
$M_1 = 10000000$	$B_{i+1} = \max\{0, K \cdot T_i \cdot (N - T_i)\}$
$m = 300000$	$T_{i+1} = T_i + B_i$
$B_1 = 10$	$S_{i+1} = \begin{cases} 0, & i < \Delta \\ B_{i+1-\Delta}, & i \geq \Delta \end{cases}$
$K = 4 \cdot 10^{-7}$	$M_{i+1} = M_i - m + B_i \cdot P_s(i) - S_i \cdot P_b(i)$
$P_b(i) = 200 + 3(i - 1)$	
$P_s(i) = 215 + 3(i - 1)$	
$\Delta = 45$	

Как видно, всё довольно просто. Реализовать эти формулы не составляет особого труда на любом, даже самом примитивном языке программирования. При аккуратном подходе будет вполне достаточно даже электронных таблиц.

Последовательно увеличивая i , мы получим динамику изменения кассы. Для данных начальных условия график M_i в зависимости от i выглядит так, как показано справа вверху.

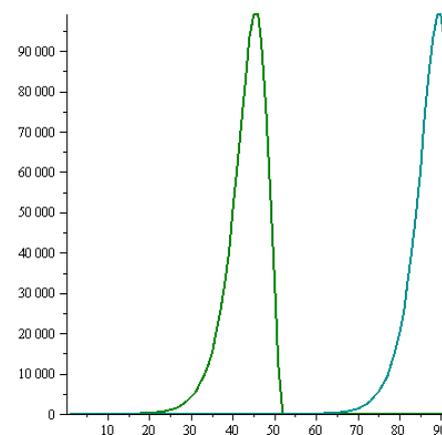
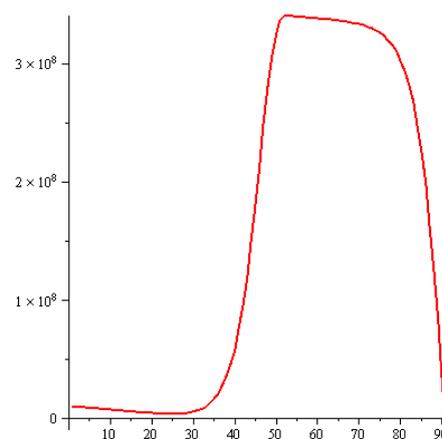
На втором графике, который приведён ниже в том же горизонтальном масштабе, показаны волны покупателей *акций* (зелёная линия) и их продавцов (синяя).

Отсюда прекрасно видна эволюция пирамиды. В начале, примерно месяц, касса постепенно уменьшается. Народ пока не очень покупает *акции*, ажиотаж мал. Затем пирамида стремительно растёт на волне поднявшегося ажиотажа. Примерно на 52-й день наступает пик. Потом мы видим период стабильности и благополучия длиной около четырёх недель. А дальше пирамида стремительно валится: куча народу приходит забирать барыши по своим *акциям*, а деньги-то не берутся из ниоткуда! Если не предпринимать дополнительных вливаний и/или регулирования курсов, то через три месяца после старта от такой пирамиды останется один пшик. Здесь уместно вспомнить историю уже упомянутого «АО МММ», когда в конце июля 1994 года *игрун* опустил курс самокотировки, взамен резко подняв темпы роста курсов. Положение сильно пошатнувшейся пирамиды быстро стабилизировалось, однако ненадолго: уже через неделю её обрушило своими действиями государство.

Какова наилучшая стратегия клиента пирамиды?

Очевидно, она заключается в том, чтобы успеть продать свои *акции* в период стабильности, пока пирамида ещё процветает и её нет смысла сворачивать. Причём — чем позже, тем лучше (курс будет выше). Проблема лишь в том, что у *клиента нет никаких реальных данных о состоянии пирамиды* (не по рекламе же судить, в самом деле). А в последние дни, как видно из графика, пирамида валится мгновенно, и здесь промедление смерти подобно.

А какова наилучшая стратегия *игруна*? Думается, что она такова. Как только касса начинает превышать определённый порог, часть кассы регулярно перекачивается в какой-то личный резерв — например, на счёт в иностранном банке. Далее *игрун* постарается протянуть период стабильности елико возможно — агрессивной рекламой, акциями по увеличению лояльности клиентов, манипуляциями с курсом и т.п. (пример см. двумя абзацами выше). Он будет пытаться угадать момент, когда сумма уже выкачанного им из кассы резерва и собственно кассы окажется близкой к возможному максимуму — и в этот момент просто сбежит. Не забыв прихватить с собой всю кассу, разумеется. После чего *акции*, оставшиеся на руках у населения, будут годны разве что для подтирки.



В отличие от клиентов, *игрун*-то владеет *все* информацией по своей пирамиде. И можете быть уверены: она постоянно и тщательно анализируется с помощью математических инструментов, гораздо более совершенных, нежели приведённая выше игрушечная модель.

Если вам не чужд математический склад ума, то вы вполне можете попробовать самостоятельно встроить в модель поведение *игруна* по перекачке кассы на свои внешние счета и определить для него оптимальный момент бегства. Поверьте, это вовсе не трудно.

И в любом случае всегда помните:

Абсолютное большинство экономических лохотронов есть не что иное, как косвенный налог на плохое знание людьми математики!