ЗАДАЧА КЕПЛЕРА ОБ ИЗМЕРЕНИИ БОЧКИ

МИХАИЛ БАЛАНДИН

MICHAEL.BALANDIN@GMAIL.COM

Иоганн Кеплер более всего известен как астроном, однако астрономия немыслима без математики, и Кеплер-математик ничуть не уступал Кеплеру-астроному. С его именем связана немного курьёзная история, которую сам он рассказал следующим образом:

> *Я ввёл в свой дом новую супругу [осенью 1613 года — М.Б.] в то время, когда Австрия, закончив обильный сбор благородного винограда, распределяла свои богатства, разослав вверх по Дунаю нагруженные баржи, в нашем Норике и весь берег в Линце был завален винными бочками, продающимися по сходной цене. Согласно обязанностям супруга и отца семейства, мне пришлось позаботиться о необходимом для дома напитке. Потому ко мне на дом было принесено и поставлено несколько бочек, а через четыре дня пришёл продавец с измерительной линейкой, с помощью которой и промерил подряд все кадки, без различия, не обращая внимания на форму, без всяких соображений и вычислений. Именно, медный оконечник линейки просовывался через наливное отверстие полной бочки поперёк до пятки того и другого деревянного круга, которые мы по-домашнему называем днищами, и после того, как в обоих случаях эта длина от верхней точки пуза до нижней того и другого дощатого круга оказывалась равной, продавец объявлял количество амфор, вмещаемых бочкой, заметив число, поставленное на линейке в том месте, на котором оканчивалась названная длина; по этому числу называлась величина цены.*
>
> *Я удивился, как это поперечная линия, проведённая через объём половины бочки, может служить указателем вместимости, и даже усомнился в правильности такого измерения, так как очень короткая, а потому и мало вместительная бочка, заключённая между кругами, лишь бы они были несколько пошире, может иметь такую же длину от отверстия до нижней точки того и другого круга. (…)*
>
> *Когда же я узнал, что такое употребление поперечной линейки установлено здесь общественными властями и измерители ручаются за его правильность, то я… счёл для себя подходящим взять новый предмет математических занятий и исследовать геометрические законы такого удобного и крайне необходимого в домашнем хозяйстве измерения и выяснить его основания, если таковые имеются.*

Вот как это измерение изображено в книге середины XX века. Наливное отверстие находилось в середине изогнутой боковой стенки; торговец просовывал через него линейку настолько далеко, насколько это было возможно (делая промер дважды в обе стороны от дырки, дабы убедиться в симметричности бочки) и называл объём — скорее всего, он сразу был обозначен на линейке, чтобы ничего не приходилось считать в уме.

Кеплера ввело в недоумение то, что объём цилиндрического сосуда вообще-то требует как минимум двух измерений — высоты и радиуса либо диаметра, — да ещё нужно как-то учитывать кривизну стенок, но он быстро понял, что подобная методика основана на каких-то пропорциях бочки, позволяющих обойтись только одним промером, и мало влияющих на результат при погрешностях изготовления.

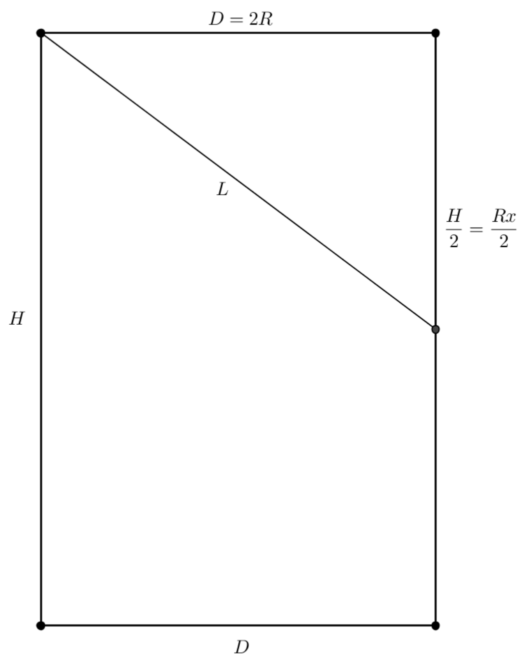
Оказалось, что тогдашние австрийские мастера изготовляли бочки, у которых высота примерно втрое превосходила радиус — или, что то же самое, в полтора раза превышала диаметр. Кеплер обнаружил, что эта пропорция выбрана не случайно: если зафиксировать значение описанного выше промера, то при таком соотношении «высота/радиус» объём бочки будет близок к максимально возможному! Вот как это открытие было им описано в книге с замысловатым названием «НОВАЯ СТЕРЕОМЕТРИЯ ВИННЫХ БОЧЕК преимущественно австрийских, как имеющих самую выгодную форму и исключительно удобное употребление для них кубической линейки, с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии»:

> *Ясно, что австрийские бочары как бы по здравому и геометрическому смыслу при построении бочки соблюдают правило, чтобы за радиус днища брать треть длины клёпок*[1]*. Именно, при таком устройстве цилиндр, мысленно построенный между двумя днищами, будет… самым вместительным, хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили, потому что… по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно.*

Получить этот результат Кеплеру было нелегко. Во-первых, в начале XVII века в Европе ещё не получило распространения искусство алгебраических преобразований, основанных на буквенных обозначениях и формальных операциях с ними (более или менее современный вид они обрели только в середине века). Теми зачатками алгебры, которые уже успели сформироваться, Кеплер не пользовался: отсутствие единых обозначений приводило к тому, что пояснения к выкладкам часто занимали больше места, чем сами выкладки. Во-вторых, не было ещё аппарата дифференциального и интегрального исчисления, неимоверно облегчающего исследование функций — более того, работы Кеплера как раз и послужили одной из предпосылок их появления!

В современной литературе по занимательной математике вопрос об измерении бочек освещается достаточно часто, но практически всегда однобоко: он либо кратко упоминается как голый факт истории, либо рассказывается непосредственно «по Кеплеру» (а это длиннейшая и сложнейшая цепочка рассуждений, способная отбить интерес у любого неискушённого читателя), либо подаётся как «мостик» при переходе к изложению понятия производной — да нередко ещё и с ошибками.

Мы проследим полный ход решения этой старинной задачи средствами современной математики, причём для этого вполне достаточно будет знаний в объёме школьной программы десяти классов.



[1] Клёпками называют доски, из которых набирается выпуклая боковая стенка бочки. Наливное отверстие делалось в центре одной из этих досок.

Пусть цилиндрическая бочка имеет радиус днища R (и, соответственно, диаметр $D = 2R$) при высоте H. Будем считать, что между радиусом и высотой имеется некоторое соотношение $H = xR$ (оптимальную величину x нам пока ещё предстоит найти вслед за Кеплером, хотя и другими средствами). Результат измерения расстояния от наливного отверстия до наиболее удалённой точки днища обозначим буквой L.

По теореме Пифагора,

$$L = \sqrt{D^2 + \frac{H^2}{2^2}} = \sqrt{4R^2 + \frac{x^2R^2}{4}} = \frac{R}{2}\sqrt{x^2+16}\,,$$

откуда легко выразить R и H:

$$R = \frac{2L}{\sqrt{x^2+16}}\,, \qquad H = xR = \frac{2Lx}{\sqrt{x^2+16}}.$$

Тогда по известной формуле объёма цилиндра $V = \pi R^2 H$ объём бочки составит

$$V(L) = \frac{8\pi x L^3}{(x^2+16)^{3/2}}\,.$$

Нам удобно будет ввести вспомогательную функцию $f(x)$, отнеся к ней всё не зависящее от L:

$$f(x) = \frac{8\pi x}{(x^2+16)^{3/2}}\,,$$

тогда $V(L) = f(x)L^3$.

Рассмотрим функцию $f(x)$. Нетрудно видеть, что она определена при любом вещественном x (нас, очевидно, интересует лишь случай $x > 0$), всюду непрерывна (знаменатель нигде не обращается в нуль) и всюду дифференцируема. Можно также видеть, что $f(0) = 0$, далее $f(x) > 0$ при $x > 0$ и, наконец, $f(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Это означает, что функция имеет по меньшей мере одну точку максимума со строго положительным значением. Найдя этот максимум, мы как раз и определим, при каком соотношении x между высотой и радиусом днища бочка для фиксированного измерения L будет иметь наибольшую вместимость.

Чтобы найти его, вычислим производную $f'(x)$ по известным из школьного курса правилам дифференцирования:

$$f'(x) = 8\pi \cdot \frac{(x^2+16)^{3/2} - \frac{3}{2}x(x^2+16)^{1/2}\cdot 2x}{(x^2+16)^3} = \frac{8\pi(x^2+16)^{1/2}(x^2+16-3x^2)}{(x^2+16)^3} = \frac{16\pi(8-x^2)}{(x^2+16)^{5/2}}\,.$$

Здесь знаменатель никогда не обращается в нуль, поэтому равенство $f'(x) = 0$ справедливо тогда и только тогда, когда $8 - x^2 = 0$. Из двух корней этого уравнения нас интересует положительный

$$x = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \approx 2.83,$$

он-то и даёт единственную точку максимума функции $f(x)$. Найдём этот максимум:

$$F = \max_{x>0} f(x) = f\left(2\sqrt{2}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \approx 0.6\,.$$

Итак, выбор $x = 3$ действительно является очень хорошим приближением к «наиболее объёмистой» пропорции бочки!

Кеплер сформулировал этот результат (полученный совершенно другим, чисто геометрическим способом) в виде следующей теоремы[2]:

> ***Теорема V***. *Из всех цилиндров, имеющих одну и ту же диагональ, самым большим и вместительным будет тот, в котором отношение диаметра к высоте равно $\sqrt{2}$.*

Убедимся, что это то же самое. Цилиндр, образующий половину бочки, имеет половинную высоту $h = \frac{H}{2}$ и тот же диаметр $D = 2R$. Тогда, согласно Кеплеру, оптимальное отношение есть

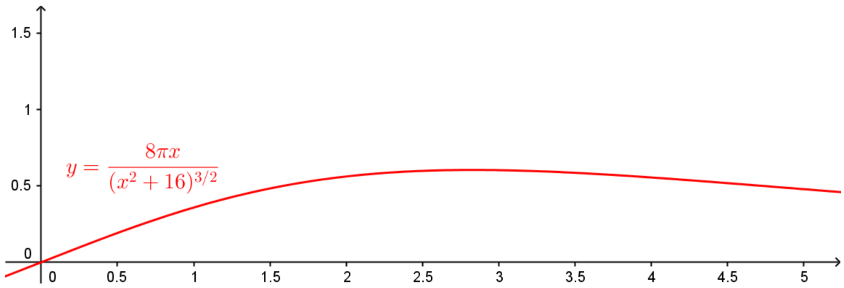
$$\frac{D}{h} = \frac{2R}{h} = \sqrt{2}, \quad \text{откуда} \quad \frac{R}{h} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{откуда} \quad \frac{h}{R} = \sqrt{2}.$$

Если же брать бочку в целом, то

$$\frac{H}{R} = 2 \cdot \frac{h}{R} = 2\sqrt{2},$$

что в точности совпадает с нашим результатом.

Вот как при $x > 0$ выглядит график функции $f(x)$, построение которого с учётом непрерывности и гладкости вполне можно поручить компьютерной программе:



Отлично видно, что вблизи точки максимума функция меняется очень медленно — это то самое «по обе стороны от места наибольшего значения убывание вначале нечувствительно», о котором писал Кеплер.

Зададимся теперь вопросом о том, *насколько* же оно нечувствительно. Для этого сначала нужно определиться с тем, какую относительную погрешность нахождения объёма бочки мы считаем допустимой. Пусть, например, это два процента[3]. Имея точную формулу расчёта объёма $V = f(x)L^3$ и приближённую $\hat{V} = FL^3$, запишем неравенство

$$\frac{\hat{V} - V}{V} = \frac{FL^3 - f(x)L^3}{f(x)L^3} = \frac{F}{f(x)} - 1 \leq 0.02,$$

из которого получаем $f(x) \geq \frac{F}{1.02}$ или, в развёрнутом виде,

$$\frac{8\pi x}{(x^2+16)^{3/2}} \geq \frac{\pi}{1.02 \cdot 3\sqrt{3}}.$$

Решать его лучше всего численно (с этим вполне справится современный микрокалькулятор), и решение имеет вид

$$x \in [2.4, 3.3].$$

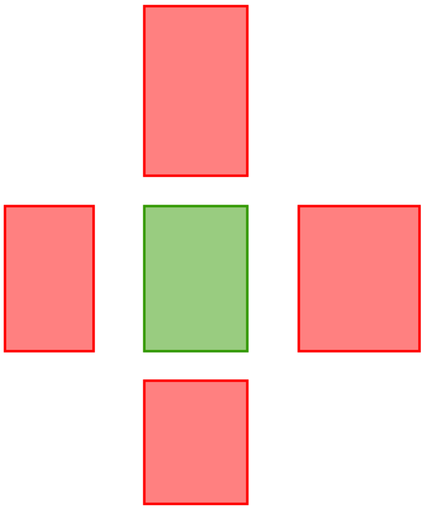
Это довольно широкий диапазон, так что кеплеровское утверждение о высокой точности «хотя бы при постройке бочки от точных правил несколько и отступили» звучит вполне логично.

---

[2] Здесь и далее нумерация теорем совпадает с оригинальной кеплеровской, использованной им во *второй* (основной) части трактата.

[3] В действительности практические замеры линейкой выполняются так, что погрешность *измерения* скорее всего перекроет данную погрешность *вычисления*. Чуть позже мы ещё скажем о том, откуда взялись эти два процента.

На следующем рисунке для наглядности показаны пропорции цилиндрических бочек, имеющих отступление от оптимума в рамках указанного диапазона (зелёный прямоугольник в центре — «идеальная бочка» с соотношением $H:R = 2\sqrt{2}$, красные вокруг него — искажения по каждому измерению):



Итак, *если пропорции бочки хоть сколько-нибудь близки к оптимальным — а Кеплер проверил и убедился, что у тогдашних австрийских бочек они были весьма близки, — то один промер от наливного отверстия до самой дальней точки днища позволяет вполне точно вычислить объём бочки по формуле* $V = 0.6 \cdot L^3$.

Обратимся теперь к современности. В нынешних российских условиях параметры промышленно выпускаемых бочек устанавливает ГОСТ 13950-91 «Бочки стальные сварные и закатны́е с гофрами на корпусе. Технические условия». В следующей таблице приведены размеры нескольких типовых бочек согласно данному ГОСТу:

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
диаметр, мм	442	442	560	564	360	380	600
высота, мм	575	654	815	805	550	590	880
x	2.6	3.0	2.9	2.9	3.1	3.1	2.9

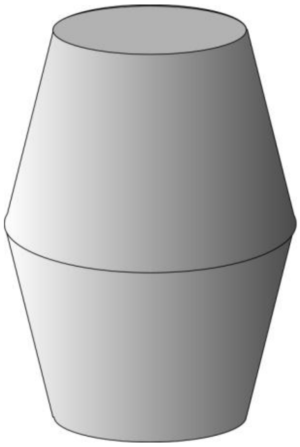
Как видно, все они очень близки к «стандарту» австрийских бондарей XVII века и прекрасно укладываются в найденный нами диапазон! Из этого же ГОСТа взята и относительная погрешность 2%, установленная для изготовителей[4] и взятая нами при исследовании.

Было бы, однако, преждевременным считать, что наше исследование закончено! Кеплер рассматривал *прикладную задачу о реальном объекте*, а деревянные бочки не являются цилиндрами: они имеют выпуклые стенки. Открытым пока остаётся вопрос о применимости найденной формулы к тем случаям, когда цилиндр «раздувается».

Представим бочку в виде тела, составленного из двух одинаковых прямых усечённых конусов, соединённых вместе широкими основаниями. В силу симметрии достаточно будет рассмотреть лишь один из них, сравнив его с половиной цилиндра исходной бочки. Из курса стереометрии известно, что прямой усечённый конус с высотой h и радиусами оснований r, R имеет объём

$$V_K = \frac{\pi h}{3}(r^2 + rR + R^2).$$

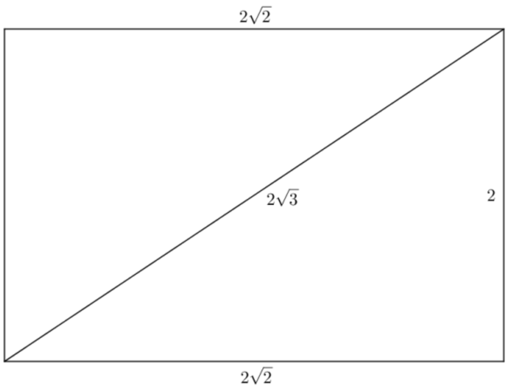
[4] Если быть точным, то ГОСТ определяет понятия *номинального* объёма бочки (количество жидкости, которое будет заливаться в неё при нормальной эксплуатации) и *максимального* объёма (наибольшее количество жидкости, которое в неё вообще можно залить). Отклонение максимального объёма от указанного стандарта не должно превышать 2% (при этом стандарт таков, что уменьшенный на 2% максимальный объём всё равно остаётся больше номинального).

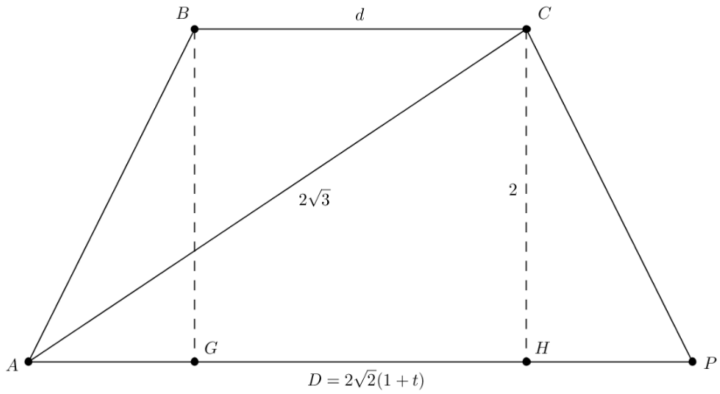


Допустим, что цилиндрическая полубочка претерпела небольшое искажение и превратилась в усечённый конус той же высоты $h = H/2$ и с той же диагональю осевого сечения L. Насколько от этого изменился её объём?

Кеплер рассматривал *произвольный* цилиндр исходной полубочки, мы же несколько упростим себе задачу и будем считать, что исходная бочка была «идеальной» и имела отношение высоты h к диаметру, равное $\sqrt{2}$. Примем для удобства выкладок, что в некоторых «условных единицах» полубочка имела высоту $h = 2$ и диаметр основания $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$. Её объём равен тогда $V_C = 4\pi$.

В результате искажения получился усечённый конус с основаниями диаметров D (больший) и d (меньший). Пусть $D = 2\sqrt{2}(1+t)$, где $t > 0$ — некоторый коэффициент. Осевым сечением был прямоугольник $2 \times 2\sqrt{2}$ с диагональю $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$, такую же диагональ должна иметь и трапеция нового осевого сечения. Исходя из этого, можно найти диаметр d меньшего основания.





Заметим, что $AH = 2\sqrt{2}$. Действительно, прямоугольный треугольник $\triangle ACH$ имеет гипотенузу AC, совпадающую с диагональю прямоугольника и катет CH, совпадающий с высотой прямоугольника — значит, второй катет AH совпадает с основанием прямоугольника. Далее,

$$AG = HP = AH - d = \frac{D-d}{2}, \quad \text{откуда} \quad 2\sqrt{2} - d = \sqrt{2}(1+t) - \frac{d}{2}.$$

Решая это уравнение, находим $d = 2\sqrt{2}(1-t)$.

Итак, трапеция $ABCP$, являющаяся осевым сечением конуса с искажением t, имеет высоту 2 и основания $2\sqrt{2}(1 \pm t)$. Кеплер получил более общий результат, с которым наши выкладки прекрасно согласуются:

> ***Теорема XII****. У цилиндра, имеющего общую высоту и диагональ осевого сечения с прямым усечённым конусом, диаметр основания равен среднему арифметическому диаметров оснований усечённого конуса.*

Теперь, полагая $R = D/2 = \sqrt{2}(1+t)$, $r = d/2 = \sqrt{2}(1-t)$ и $h = 2$, мы можем найти объём усечённого конуса, образованного искажением цилиндра «идеальной полубочки»:

$$V_K = \frac{2\pi}{3}[2(1+t)^2 + 2(1+t)(1-t) + 2(1-t)^2] = \frac{4\pi}{3}(t^2+3) = 4\pi + \frac{4\pi t^2}{3} = V_C + \frac{V_C t^2}{3}.$$

Стало быть, относительная погрешность искажения объёма бочки при её конусообразном t-раздутии составляет

$$\delta = \frac{V_K - V_C}{V_C} = \frac{t^2}{3}.$$

Это опять-таки является частным случаем одной из теорем Кеплера:

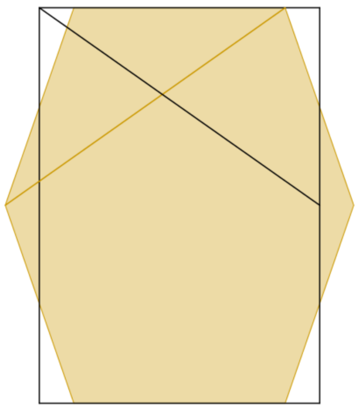
> ***Теорема XIII***. *Избыток усечённого конуса над цилиндром, имеющим общие с ним диагональ осевого сечения и высоту, относится к этому цилиндру, как двенадцатая часть квадрата разности диаметров оснований конуса к квадрату диаметра основания цилиндра.*

В наших обозначениях теорема XIII утверждает, что

$$\delta = \frac{V_K - V_C}{V_C} = \frac{(D_K - d_K)^2}{12 d_C^2}.$$

Подставляя сюда $d_C = 2\sqrt{2}$, $D_K = 2\sqrt{2}(1+t)$, $d_K = 2\sqrt{2}(1-t)$, нетрудно получить результат, совпадающий с нашим.

Решая простое квадратичное неравенство $\delta \leq 0.02$, получаем, что относительная погрешность искажения объёма при конусообразном раздутии «идеального» цилиндра не превысит 2%, если только $0 \leq t \leq 0.244$. Это довольно сильное раздутие показано на следующем рисунке:



Он выполнен в правильном масштабе, и диагонали обеих фигур совпадают.

На основании процитированных теорем Кеплер сделал следующие выводы: при пропорциях цилиндрической бочки, близких к идеальному $H{:}\,R = 2\sqrt{2}$, единственный диагональный замер позволяет вычислить объём с высокой точностью; при искажении цилиндрической бочки в двухконусную сохранение диагонали осевого сечения довольно долго сохраняет объём очень близким к исходному. По какой-то причине австрийские мастера изготовляют бочки с пропорциями, весьма близкими к оптимуму, а потому измерения виноторговцев действительно вполне достоверны. В восхищении он заметил:

> *Как же отрицать, что* ***природа по одному инстинкту, без всякого рассуждения учит геометрии***[5]*, когда наши бочары, руководимые только глазом и красотой формы, научились половиной бочки изображать самую вместительную фигуру!*

[5] Часть фразы выделена так в оригинале.

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РАЗМЫШЛЕНИЯ

Усечённый конус имеет радиус меньшего основания $\sqrt{2}$ и образующую 2 (то есть при отсутствии конусности он оказывается половиной «оптимальной цилиндрической бочки»). При какой высоте он будет иметь наибольший возможный объём и какой именно? Под какими углами при этом образующая будет наклонена к основаниям? Какова будет диагональ L осевого сечения и насколько точно объём такой бочки будет описываться приближённой «кеплеровской» формулой $V \approx 0.6 \cdot L^3$?

ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Кеплер* **Стереометрия винных бочек**./пер. с лат. (Серия «Классики естествознания»). — М.-Л.: ГТТИ, 1935

[2] *М. Балк* **Секрет Старого Бондаря**. «Квант» 1986, № 8, стр. 14—18.

[3] *А. Спивак*, *В. Тихомиров* **Кеплер и винные бочки — австрийские и рейнские**. «Квант» 2006, № 6, стр. 3—11.

[4] ГОСТ 13950-91 **«Бочки стальные сварные и закатны́е с гофрами на корпусе. Технические условия»**