
Казуистическая логика

М.Баландин, michael.balandin@live.ru

Эту подборку задач объединяют хитрые логические условия и всяческая казуистика, подчас введённая искусственно, но дающая прекрасную пищу для ума. Можно сказать, что это мини-задачник по логике — если под логикой понимать не формальное аристотелево исчисление силлогизмов (хотя один силлогизм в задачах вы всё же найдёте — см. № 3) и не булеву алгебру, а приложение умственных способностей к разрешению запутанных ситуаций.

Ряд таких задач традиционно упоминает две категории людей: тех, которые постоянно лгут, и тех, которые говорят только правду. Если для первой категории есть удобное и короткое слово «лжецы», то для говорящих правду в русском языке подобного слова нет. Я предпочитаю употреблять слово «правдивцы» — возможно, термин не самый красивый и благозвучный, но другого мне придумать не удалось.

Считаю необходимым лишний раз напомнить золотое правило чтения любых книг по занимательной математике: *прежде, чем смотреть в ответ, нужно постараться приложить все силы к тому, чтобы попробовать решить задачу самостоятельно!*

Первая часть содержит логические задачи, которые в большинстве своём не требуют каких-либо специальных математических познаний. Вполне достаточно здравого смысла. В тех отдельных случаях, когда одного его может не хватить, и нужны дополнительные знания (главным образом представления об индукции), название сопровождается знаком книги: 📖.

Задачи приводятся по возрастанию сложности. На всякий случай к каждому названию добавлена её характеристика в виде одного, двух или трёх значков \diamond .

\diamond означает достаточно простую задачу, которая у большинства людей не должна вызвать никаких затруднений.

$\diamond\diamond$ означает задачу средней сложности, над которой придётся основательно подумать.

$\diamond\diamond\diamond$ означает реально сложную задачу. Если вам удастся решить одну из таких, то можете вполне заслуженно гордиться собой — самостоятельно это удаётся весьма немногим!

Некоторые задачи снабжены примечаниями об их истории и/или предостережениями о типичных ошибках.

Вторая часть содержит не задачи, а *логические этюды* — то есть небольшие истории, связанные с парадоксальными или неожиданными логическими выводами, которые роднят их с задачами первой части или просто забавны сами по себе. Одна из этих историй — притча о Ходже Насреддине и правдивых законах — очень стара. Она записана ещё в XVI веке на территории современной Турции.

Третья часть, как обычно в таких подборках, содержит пояснения к задачам и их решения. Иногда указаны книги, в которых можно найти дополнительную информацию.

Желаю удачи!

Задачи

1. Рыцарь и оруженосец ◇

Известно, что рыцарь на заданный ему вопрос непременно ответит правду, а его оруженосец непременно соврёт. Какой вопрос им следует задать, чтобы оба они ответили на этот вопрос одинаково? Для простоты можно ограничиться такими вопросами, которые требуют только одного из двух ответов: «да» или «нет».

2. Разные ответы Платона ◇

Говорят, что Платон на заданные ему вопросы всегда отвечал правду и только правду. Однако, когда некто два раза подряд задал ему один и тот же вопрос, он ответил на него по-разному. Что же это был за вопрос?

Примечание. Вопрос задавали Платону именно *подряд*. Считайте, что за время повторения вопроса вокруг Платона и его собеседника ничто не успело измениться, а само это время является пренебрежимо малым.

3. Кошки и их хвосты ◇

Найдите ошибку в следующем рассуждении: «Не существует кошки с десятью хвостами. У всякой существующей кошки на один хвост больше, чем у несуществующей. Следовательно, всякая существующая кошка имеет одиннадцать хвостов».

4. Два привратника ◇ ◇

Возле двух дверей стоят два привратника. Одна дверь ведёт к сокровищу, а другая к ужасной гибели. Можно задать один — и только один — вопрос одному из привратников. Вопрос должен быть таким, чтобы он подразумевал ответ только «да» или «нет». Известно, что один из привратников лжец, а другой правдивец (но неизвестно, кто из них кто). Кому и какой вопрос следует задать, чтобы достоверно выяснить путь к сокровищу?

О задаче. Из логических проблем, в которых речь идёт о лжецах и правдивцах, эта является самой старой. Считается, что она имеет ещё древнегреческое происхождение. Условия этой задачи были использованы в голливудском фильме «Лабиринт» («Labyrinth», 1986 год). В фильме она решена совершенно правильно.

5. Два электрических стула (вариант задачи 4) ◇ ◇

Бандюгу Джо приговорили к казни на электрическом стуле. В тюрьме таких стульев два, причём один неисправен — только комендант тюрьмы знает, который именно. Казнить два раза нельзя, так что если Джо сядет на неисправный стул, то останется в живых. В качестве последнего желания Джо мог бы задать один вопрос коменданту, но тот давно предусмотрел такую возможность и на вопрос об исправности стульев через день отвечает правду, а через день врёт. Какой вопрос следует задать, чтобы точно сесть на неисправный стул?

6. «Бла-бла-бла» и два туземца ◇ ◇

Некий тропический остров населён двумя племенами: правдивцами и лжецами. Путешественник, встретив двух туземцев, спросил одного из них (того, что был повыше): «Вы говорите правду?». Однако тот явно не любил иностранцев: он смерил путешественника презрительным взглядом, процедил сквозь зубы на своём родном языке что-то вроде «бла-бла-бла» и высокомерно отвернулся. Другой туземец, ростом пониже, извинился за него и пояснил: «Он сказал “да”. Но на самом деле он лжец». Что можно сказать о принадлежности этих двух туземцев к названным племенам?

Примечание. Эта задача может оказаться хитрее, чем кажется на первый взгляд. Постарайтесь подойти к ней не только с позиций формальной логики, но и с точки зрения «житейского» здравого смысла!

7. Расследование преступления



На том же острове правдивцев и лжецов было совершено преступление. По горячим следам на месте происшествия схватили несколько подозреваемых. Один из них закричал: «Преступник лжец!», и был тут же отпущен. Объясните, почему.

8. Парадокс Эпименида



Некто Эпименид (греческий поэт, живший на острове Крит в VI в. до н.э.) однажды категорически заявил: «Все критяне — лжецы!». Долгое время (с учётом того, что сам Эпименид тоже критянин) это высказывание считалось парадоксом, однако в действительности такое вполне может быть. Приведите пример ситуации, в которой заявление Эпименида не приводит ни к каким противоречиям.

О задаче. Эпименид является реальной исторической личностью. О парадоксе, носящем его имя, было написано несколько трактатов и он послужил причиной множества ожесточённых философских споров. Камнем преткновения было незначительное на первый взгляд обстоятельство: из высказывания следует, что Эпименид объявил лжецом *самого себя*. Кто же он в действительности? Лжец? Но ведь он именно это и сказал, а следовательно, его заявление правдиво, и Эпименид не может являться лжецом! Но если его заявление правдиво, то он всё-таки лжец и т.д.

9. Протагор против Квантла



Рассказывают, что некто Квантл пришёл к известному адвокату Протагору и попросил научить его всем тонкостям судебного крючкотворства. Тот согласился, причём их уговор предусматривал, что Квантл заплатит за обучение лишь тогда, когда выиграет в суде свой первый процесс.

Протагор честно обучил его, однако Квантл не торопился выступать в суде. Он был достаточно обеспечен, чтобы не беспокоиться о куске хлеба, а Протагор был довольно стар, и это позволяло ученику подождать до тех пор, пока учитель умрёт и платить будет некому.

Возмущённый Протагор решил ускорить получение своей платы и подал против Квантла иск. Его рассуждения были таковы: если суд примет решение в пользу Квантла, то это будет означать, что тот выиграл свой первый процесс и тогда ему придётся платить по договору. Если же решение будет в пользу Протагора, то он сможет получить плату «по суду».

Однако Квантл учился у него не зря! Он представил свои аргументы: решение в его пользу позволит не платить «по суду», а решение в пользу Протагора будет означать, что первый процесс ещё не выигран и договор не вступил в силу.

В общем, любой вариант приводил к конфликту решения суда и заключённого договора. Судья оказался в очень трудной ситуации, хотя по логике и справедливости Протагор *должен был* получить условленную плату.

Поломав голову, судья всё же нашёл такое решение проблемы, которое позволило Протагору взыскать с Квантла свой гонорар. Что это было за решение?

О задаче. «Парадокс Протагора» имеет ярко выраженное древнегреческое происхождение и, говорят, представляет собой реально имевший место судебный казус.

10. Индукция Пойа



Оказывается, с помощью метода математической индукции, можно показать, что все лошади на Земле имеют одинаковую масть! Вот как это делается.

Будем пользоваться следующим обозначением: если x — это некоторая лошадь, то $f(x)$ будет обозначать её масть.

Начнём с основания индукции. Здесь никаких сомнений нет: если взять *одну* лошадь x , то она будет иметь одну-единственную — свою собственную — масть $f(x)$.

Теперь выполним индукционный переход. Нужно показать, что если любые n лошадей имеют одну масть, то и про любых $(n + 1)$ лошадей можно сказать то же самое.

Возьмём произвольно $(n + 1)$ лошадей. Обозначим их $x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$. По индукционному n -предположению, имеет место равенство n мастей

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n).$$

По тому же самому n -предположению, справедливо и другое равенство n мастей:

$$f(x_2) = f(x_3) = \dots = f(x_n) = f(x_{n+1}) —$$

ведь *любые* n лошадей имеют одинаковую масть. Но тогда по транзитивности отношения равенства получаем, что

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_n) = f(x_{n+1}),$$

то есть из n -предположения следует $(n + 1)$ -вывод о том, что $(n + 1)$ лошадей будут иметь одинаковую масть!

Все требования индукции выполняются и, стало быть, утверждение «все лошади имеют одну масть» справедливо.

В чём же неверны приведённые рассуждения?

Примечание. Все, кто решают эту задачу, почти неизбежно совершают две ошибки. Во-первых, делаются попытки найти в рассуждениях некий словесный подвох (чаще всего — про нумерацию лошадей). **Его здесь нет!!!** Неточность носит строго математический характер и ни на какую игру слов не опирается! Во-вторых, часто делается попытка *построить опровержение* того, что все лошади имеют одну масть. **Это не то, что требуется!!!** Нужно найти неточность в самой индукции, никак не выходя за её пределы!

О задаче. Эта проблема была поставлена в книге Д. Пойа «Математика и правдоподобные рассуждения». Однако там она сформулирована чуть по-другому — автор рассуждал не о лошадиных мастях, а о том, что *все женщины имеют глаза одинакового цвета*. Вариант с лошадьми взят из книги Д. Кнута, Р. Грэма и О. Паташника «Конкретная математика».

11. Две страны



Граница между соседними странами-союзниками А и Б проходит так хитро, что лишь жители этих двух стран точно знают, где заканчивается одна страна и заканчивается другая. Естественно, они часто бывают в гостях друг у друга. При этом в силу исторически сложившейся подозрительности жители Б на любой вопрос человека, не являющегося гражданином этих двух стран, принципиально отвечают неправду. Жители А, напротив, высоко ценят доходы от туризма и охотно, без утайки, отвечают на вопросы приезжих о себе и своей стране. Может ли путешественник (являющийся для А и Б иностранцем), задав один-единственный вопрос первому встречному, достоверно выяснить, в какой из двух этих стран он находится?

12. Парадокс узника



Судья приговорил преступника к смертной казни. Вынеся приговор, он сказал ему так:

— Тебя казнят в один из дней следующей недели. О казни ты узнаешь в её день, в десять часов утра, не раньше и не позже.

Этот приговор был вынесен в пятницу, так что раньше понедельника казнь состояться не могла. Все выходные узник пытался на основании слов судьи вычислить, сколько же дней жизни ему остаётся, и вот до чего он додумался:

«Последним возможным днём казни является следующее воскресенье. Но в то воскресенье казнить меня не смогут. Ведь если в десять утра субботы мне не скажут о субботней казни, я уже тогда буду знать о том, что она состоится в воскресенье — иного просто не остаётся. А это противоречит словам судьи, который сказал, что про казнь я узнаю в тот же день. Стало быть, остаются только шесть дней с понедельника по субботу. Но совершенно аналогично, меня не смогут казнить и в субботу: если в десять утра пятницы не сказали о пятничной казни, то я буду знать заранее! Если продолжать таким же манером... да получается, что на основании слов судьи, меня вообще нельзя казнить так, чтобы выполнялись все условия! Наверное, судья хотел, чтобы я трясся эту неделю от страха в ожидании смерти, а потом он меня помилует.»

Построивши эту обратную индукцию — именно так на языке логики называются подобные рассуждения — узник совершенно успокоился. Прошло несколько дней, о казни никто не заикался, и он ещё больше укрепился в своей уверенности о помиловании.

Но в четверг, ровно в десять утра, камеру посетил дружелюбно улыбающийся палач.

— Готовься, приятель! — развёл он руками. — Сегодня после обеда будем тебя того... этого...

Чувства, которые при этом известии испытал узник, пусть каждый представит себе сам. Среди прочего было искреннее недоумение и возмущение: чёртов судья как-то всё же ухитрился сдержать своё слово! Ведь четверг укладывался в обещанную им неделю. И палач сообщил о казни в десять утра того же дня. И до визита палача узник не знал о сегодняшней казни — более того, думал, что её не будет вообще.

Это могло означать только одно: что в рассуждениях о невозможности казни была какая-то ошибка. Все оставшиеся часы жизни узник употребил на её поиски. Нашёл ли, нет ли — неизвестно. После обеда его казнили, а палача никакие индукции и ошибки в них не интересовали.

Так в чём же все-таки была ошибка узника?

О задаче. «Парадокс узника» был впервые описан М. Скривеном в 1951, хотя, по некоторым данным, он упоминался ещё в начале 1940-х годов. Эта задача считается одним из самых изящных логических парадоксов XX века.

13. Сорок неверных жён



Некий король был очень озабочен падением нравов в своём королевстве. Сорок женщин вовсю изменяли своим мужьям, так что разврат принял совершенно неприличные масштабы. Как это часто бывает, все мужчины королевства знали всё про измены в чужих семьях, но ничего не знали про свою собственную семью.

Король издал указ, по которому всякий мужчина мог во внесудебном порядке убить свою жену, если был полностью убеждён в её неверности. Никаких имён и цифр в указе не называлось. Предписывалось также, во избежание излишней жестокости, убивать неверных жён во сне.

К большому удивлению чиновников и полиции, на следующий день не было слышно ни о каких убийствах жён. Подождали ещё день, и ещё, и ещё, но мужья не торопились наказывать изменниц.

— Не объявить ли нам имена неверных жён? — предложил королю начальник полиции, в очередной раз докладывая ситуацию. — Похоже, что мужья не собираются решать эту проблему своими силами.

— Нет, — отмахнулся король. — Может, мои подданные и ленивы, но я знаю, что они умны и сообразительны. Подождём ещё, и проблема исчезнет.

— Ну, может, хоть число объявим? — сказал начальник полиции ещё через пару дней. — Не понимаю, чего они не шевелятся. Выследить неверную жену, что может быть проще...

— Кому как! — возразил ему король. — Ты-то с твоим опытом, конечно, людей насквозь видишь... К тому же тебе легко рассуждать: ты вдовец и тебя лично эта ситуация не касается. Нет уж, пусть всё идёт своим ходом.

Шли дни и недели, обстановка не менялась, а король на все инициативные предложения отвечал отказом: дескать в самом скором времени всё решится само, и нечего тут суетиться.

Развязка наступила на сороковой день после оглашения указа. За одну ночь были убиты сорок женщин, причём, как показало проведённое полицией расследование, это были именно те самые сорок неверных жён.

— Ничего не понимаю! — воскликнул начальник полиции. — Ну ладно, неудивительно ещё, что рогносцам понадобилось столько времени на выяснение неверности. Но почему они убили своих жён все разом в одну ночь?

— А я именно этого и ждал, именно в эту ночь, — усмехнулся король. — Мои подданные и впрямь ленивы, раз никто не удосужился как следует последить за своей женой. Но с мозгами у них всё в полном порядке, раз события произошли именно так. Подумай немного, поставив себя на место одного из рогносцев, и ты поймёшь это.

На чём была основана уверенность короля, заранее знавшего, что все сорок неверных жён будут убиты именно в сороковую ночь действия указа?

Логические этюды

Ходжа Насреддин и правдивые законы

Рассказывают, что однажды некий султан задумал искоренить в своём государстве ложь. С этой целью он издал закон, который обязывал всех говорить правду и только правду. Лжецам грозила смерть, для чего на главной городской площади была построена виселица и к ней приставлено несколько стражников.

Когда о новом законе узнал Ходжа Насреддин, он надел свой самый яркий халат, оседлал ишака и поехал на площадь.

Проезжая мимо стражников, он громким и гнусавым голосом затянул песенку. Стражники проводили его взглядами.

Миновав площадь, Насреддин сделал круг по близлежащим улочкам, въехал на неё снова и опять с песенкой проехал мимо стражников. На этот раз он заметил, что стражники показывают на него пальцами и о чём-то переговариваются.

В третий раз стражники не выдержали, остановили его и спросили:

— Скажи, зачем ты всё время едешь тут мимо нас?

— Я езджу тут, чтобы вы повесили меня на этой виселице, — сказал Насреддин.

— Что за брехня! — возмутились стражники. — Ответь по-человечески!

— Если это брехня, — пожал плечами Ходжа Насреддин, — то выполняйте султанский указ...

Стражники вспомнили, зачем их поставили здесь, и взялись за дело. Они подвели Насреддина к виселице и уже собрались надеть петлю ему на шею, но он остановил их словами:

— Подождите минутку. Если вы сейчас повесите меня, то ведь получится, что я говорил правду.

Стражники переглянулись, почесали в затылках, и старший из них буркнул:

— Ладно. Ступай себе своей дорожкой и впредь лучше не шути с такими вещами...

— Но ведь если вы отпускаете меня, — поднял палец Насреддин, — то получится, что я лгал, и меня надо повесить?

Стражники снова переглянулись и стали обсуждать ситуацию. Очень быстро они запутались, переругались и решили отвести пленника к султану, чтобы он сам думал, насколько всё это соответствует указу.

Султан сразу узнал знаменитого хитреца, но сначала не подал виду. Он выслушал стражников, отпустил их, и оставшись с Насреддином наедине, заметил:

— Мои стражники не блещут сообразительностью, но и твоя загадка не так хитра, как ты думаешь. Раз твои слова не являлись ни правдой, ни ложью и тебе нельзя было ни отпустить, ни повесить, они могли бы просто приковать тебя к виселице. Так бы ты там и сидел остаток своих дней, не повешенный и не отпущенный. Что скажешь на это?

— Скажу только одно, — не растерялся Ходжа Насреддин. — Если по правдивому закону столь легко попасть в такую щекотливую ситуацию, то как же можно жить без лжи?

Королевский розыгрыш

Жил-был король, и как полагается всякому приличному королю, при своём королевском дворе он держал шута.

Однажды утром первого апреля король сказал ему:

— Послушай-ка, ведь сегодня, можно сказать, твой профессиональный праздник! В такой день ты просто обязан проявить себя чем-нибудь совершенно особенным, чтобы весь двор удивился.

— О, не извольте беспокоиться, — ехидно усмехнулся шут. — Я помню. Ужо я одурачу вас так, как никто никогда ещё не дурачил. Можете не сомневаться.

Король заинтересовался:

— И как же ты сможешь меня одурачить, если, скажем, я до полуночи посажу тебя под замок?

— Ну вот, — обиделся шут. — То «проявить себя», то «под замок»... Только не заставляйте меня размышлять о том, кто из нас тут самый большой дурак...

— Ладно! — азартно воскликнул король. — Всё равно я уже предупреждён. Делай что хочешь, я буду настороже и не дам себя одурачить.

Шут лишь пожал плечами.

Весь день король не спускал с шута глаз, когда тот находился поблизости, да ещё и пару стражников попросил о том же. Но никто не заметил ничего особенного, шут вёл себя вполне пристойно и никаких пакостей не затевал.

Вечером были дипломатические переговоры, на которых шуту присутствовать не полагалось, и король успел подзабыть о споре. Но по окончании переговоров, когда часы показывали время уже за полночь, вспомнил и велел доставить шута к себе.

— Ну что, не удалось тебе меня одурачить? — весело спросил он.

— Ещё как удалось! — возразил шут. — Ваше величество просто этого ещё не понял.

Король нахмурился и неторопливо перебрал в памяти все события дня. Потом подошёл к зеркалу и внимательно оглядел себя со всех сторон. Никаких похабных надписей на спине не было, и ничего похожего на первоапрельский розыгрыш ему не вспоминалось.

— Ваше величество сегодня весь день были настороже и постоянно ждали от меня какой-нибудь каверзы. Так? — подсказал шут.

— Ну да, — кивнул король. — После твоего предупреждения...

— Вот я вас и одурачил! — заявил шут. — Я не стал делать ничего подобного.

Логика выбора

В ресторане двое клиентов, сидящих за одним столиком, одновременно заказали каждый по фаршированной рыбе.

Когда их заказы были готовы, официант принёс две тарелки и поставил между ними на стол. Понятно, что двух одинаковых рыбин не бывает, и одна была чуть больше другой.

— Выбирайте любую, мне всё равно, — сказал один.

— Спасибо, — кивнул второй и взял себе тарелку с рыбой побольше.

Первый нахмурился и недовольно заметил:

— А если бы мне предложили выбирать первому, я бы взял себе рыбу поменьше...

— Ну так в чём же проблема?! — удивился второй. — Она ведь вам и досталась!

Парадокс всемогущества

«Парадокс всемогущества» широко известен. Его можно выразить, например, так:

- Может ли Великий Всезнай сформулировать вопрос, на который сам не сможет ответить?
- Может ли Яри Всемогущий сотворить камень, который не сможет поднять?
- Что случится, если Всесокрушающим Ядром выстрелят в Несокрушимую Стену?

Первые две формулировки, по существу, одинаковы. Третья несколько отличается от них, но по большому счёту, спрашивает о том же самом.

Рассмотрим, например, вторую формулировку. Считается, что дать ответ на вопрос невозможно. Действительно, поскольку Яри является Всемогущим, начало вопроса («может ли...») автоматически подразумевает ответ «да». Однако ответ «да» подразумевает существование камня, который Яри не может поднять, а это противоречит его всемогуществу. Если же дать ответ «нет», то это сразу противоречит всемогуществу Яри. Получается вроде бы, что ответа вообще не существует.

Трудно спорить с тем, что Всемогущий Яри и Неподъёмный Камень просто не могут существовать одновременно. Равно как не могут одновременно существовать Великий Всезнай и Вопрос Без Ответа, Всесокрушающее Ядро и Несокрушимая Стена.

Как ни странно, именно это рассуждение и даёт ответ на заданный вопрос. Да, Великий Всезнай может сформулировать такой вопрос, но за это интеллектуальное усилие ему придётся поплатиться своим рассудком, так что он уже будет не в состоянии ответить ни на какой — или, по крайней мере, на *этом* — вопрос. Да, Яри Всемогущий может сотворить такой камень, но за этот акт творения ему придётся поплатиться всемогуществом. В третьем же случае ответ совсем простой: «ничего».

Поскольку Всесокрушающее Ядро и Несокрушимая Стена одновременно не существуют, их столкновение никогда не произойдёт, и в результате его ничего не может случиться.

Я приводил эти рассуждения многим людям, но пока никто не смог их опровергнуть. Лишь один человек мгновенно задал уточнённый вопрос: «*Может ли Яри Всемогущий сотворить Неподъёмный Камень, не потеряв своего всемогущества?!*» Я вывернулся тоже мгновенно: «*Мышление Яри Всемогущего таково, что в его рамках этот вопрос не имеет смысла!*» ☺

«*В этом что-то есть*», — сказали мне. Но возражений не последовало...

Известно, что «парадокс всемогущества» часто использовался и используется в литературе. Например, первая из приведенных мной формулировок присутствует в «Повести о дружбе и недружбе» А. и Б. Стругацких, где главный герой задал этот вопрос «*Всемогущему Электронному Думателю, Решателю и Отгадывателю*», напрочь спалив тому мозги (а что я говорил?).

Самое же внятное литературное рассуждение по данному вопросу я встречал в «Острове Мёртвых» Роджера Желязны. Цитирую по переводу С. Славгородского:

— *Может ли Яри Всемогущий сотворить камень, поднять который ему не под силу?* — вмешался Грин-Грин.

— *Нет*, — коротко ответил Корткор.

— *Почему нет?*

— *Он не станет его сотворять.*

— *Это не ответ.*

— *Нет, ответ. Подумай. Ты бы стал?*

Не правда ли, очень похоже на то, как я рассуждал выше? Разница лишь в том, что я ответил «да», имея в виду *потенциал*, а Корткор ответил «нет», имея в виду *результат*. Главный-то аргумент совпадает: Яри *не станет* творить Неподъёмный Камень. Потому что это либо в голову ему не придёт, либо... а вы бы на месте Яри согласились в случае чего поплатиться всемогуществом ради эксперимента, не имеющего практической ценности?

Бедуин, который всех достал

В пустыне на короткое время пересеклись пути трёх бедуинов — Махмуда, Джафара и Абдула. Они общались недолго, но этого времени хватило, чтобы Махмуд успел чем-то смертельно оскорбить как Джафара, так и Абдула.

Совершенно независимо друг от друга они решили убить Махмуда. Джафар отравил воду в его бурдюке, Абдул же, ничего о том не зная, проковырял в Махмудовом бурдюке дырку, чтобы лишить того воды.

Потом их пути разошлись, и через три дня Махмуд умер в пустыне от жажды. Спрашивается, кто был непосредственным виновником его смерти?

Надо признать, что этот вопрос гораздо легче задать, чем ответить на него. С одной стороны, именно смерть от жажды была замыслом Абдула. Но ведь, проковыряв бурдюк, Абдул лишил Махмуда *отравленной* воды, так что не сделай он этого, Махмуд ещё быстрее умер бы от яда. Получается, что Абдул невольно даже продлил Махмуду жизнь! Но ведь, если бы не поступок Джафара, то непосредственным виновником точно был бы Абдул?

С другой стороны, Махмуд умер от жажды, а не от действия яда, так что отравительский замысел Джафара совершенно не увенчался успехом и Джафара нельзя считать убийцей. Но ведь, если бы не поступок Абдула, выпустившего отравленную воду из бурдюка, то непосредственным виновником смерти точно был бы Джафар?

Что же получается? Никто не виноват в смерти Махмуда именно потому, что виноваты оба вместе? Но ведь и сообщниками они не были — спроси любого, и тот хоть под присягой подтвердит, что действовал в одиночку, ничего не зная о действиях другого, причём будет абсолютно честен!

Приходится признать, что убийцу в данной ситуации назвать нельзя. Остаётся лишь посочувствовать тому судье, которому пришлось бы разбирать это невероятное уголовное дело...

Армейская логика. Бравый солдат Швейк и «Поправка-22»

Этот этюд будет посвящён двум эпизодам из знаменитых книг, каковые эпизоды являются ярчайшими образцами казуистической логики — она же в данном случае армейская — во всей её красе.

Первой книгой будет «Бравый солдат Швейк в плену» Ярослава Гашека. Дело происходит в начале Первой мировой войны, услышав о котором, главный герой Швейк изъявил желание «служить государю императору до последней капли крови».

Как ни странно, добился он прямо противоположного: его незамедлительно освободили от воинской службы. Вот как это происходило (цитируется по переводу Н. Роговой).

Военное начальство представить себе не могло, чтобы, находясь в здравом уме, можно было добровольно жертвовать жизнью за государя императора.

В полковой канцелярии хранился документ № 16112 с заключением высшей призывной комиссии о бравом солдате Швейке.

Его преданность государю императору была расценена как тяжёлый психический недуг; при этом комиссия опиралась всецело на заявление штабного врача, который, когда речь зашла о Швейке, сказал служителю: «Позовите этого идиота». Напрасно твердил бравый солдат Швейк, что он не уйдёт из армии, что хочет служить. У него обнаружили какой-то особенный выступ на нижней кости лобной пазухи. Когда входивший в состав комиссии майор сказал: «Вы исключительный идиот; наверно, рассчитываете попасть в генеральный штаб?», Швейк добродушно спросил: «Вы думаете, господин майор, я один туда попаду?»

За это его посадили на восемь дней в одиночку. Там его три дня забывали кормить. А когда срок, наконец, кончился, Швейка доставили в полковую канцелярию и выдали ему белый билет, где было сказано, что он уволен вчистую по причине идиотизма. Два солдата отвели его за вещами и потом вывели из казармы.

У ворот Швейк бросил чемодан на землю и воскликнул:

— Я не хочу уходить из армии! Я хочу служить государю императору до последней капли крови!

Провожатые ответили на эти исполненные энтузиазма слова тем, что ткнули его кулаком под рёбра и с помощью нескольких казарменных лодырей выволокли за ворота.

А вот вторая книга; это «Поправка 22» Джозефа Хеллера. Здесь ситуация несколько сложнее.

Идёт уже Вторая мировая война. Главный герой книги капитан Йоссариан, член экипажа бомбардировщика В-25, упрашивает военного врача Дейника освободить его от осточертевших боевых вылетов. В качестве основного аргумента он утверждает о своём сумасшествии. Дейника отказывает ему, ссылаясь на некую «поправку 22». Смысл этой поправки он объясняет Йоссариану на примере ещё одного персонажа книги, пилота Орра (которого все тоже считают сумасшедшим).

Перевод А. Кистяковского:

— Поправка-22 гласит: «Всякий, кто заботится о самосохранении, не является подлинно сумасшедшим».

Это была настоящая ловушка. «Поправка 22» разъясняла, что забота о себе самом перед лицом прямой и непосредственной опасности является проявлением здравого смысла. Орр был сумасшедшим, и его можно было освободить от полетов. Единственное, что он должен был для этого сделать, — попросить. Но как только он попросит, его тут же перестанут считать сумасшедшим и заставят снова летать на задания. Орр сумасшедший, раз он продолжает летать. Он был бы нормальным, если бы захотел перестать летать; но если он нормален, он обязан летать. Если он летает, значит, он сумасшедший и, следовательно, летать не должен; но если он не хочет летать, — значит, он здоров и летать обязан. Кристальная ясность этого положения произвела на Йоссариана такое глубокое впечатление, что он многозначительно присвистнул.

— Хитрая штука эта «поправка 22», — заметил он.

— Ещё бы! — согласился Дейника.

Йоссариан ясно увидел глубочайшую мудрость, таившуюся во всех хитросплетениях этой ловушки. «Поправка 22» поражала воображение, как хорошая модернистская картина.

Как видно, ситуация в чём-то прямо противоположна предыдущей. Но армейская логика изменилась мало, разве что стала более изощёренной. Ну так и неудивительно — сколько лет прошло!

Во многих языках программирования подпрограммы и функции, вызывающие сами себя, вполне допустимы, а в ряде языков без них даже в принципе нельзя обойтись. В математике определение функций через самих себя также является обычным делом — взять хотя бы факториал, который можно описать в виде $n! = n \cdot (n - 1)!$, где $0! = 1$. Такой приём в программировании называется *рекурсией*, а в математике *рекуррентностью*.

Но в логике замыкание утверждения на себя очень часто ведёт к совершенно головоломным ситуациям. Один из примеров таких ситуаций мы уже видели — см. задачу № 8 «Парадокс Эпименида» и ответ к ней.

Напомню, что парадоксом лжеца или расширенным парадоксом Эпименида называется замкнутый круг противоречий, вытекающий из заявления человека «я лжец». Если он действительно лжец, то он тем самым сказал правду, а если он правдив, то его заявление лживо и т.д.

Несколько более сложным вариантом этого парадокса является ситуация, когда утверждение замыкается само на себя не прямо, а через другое утверждение. Ещё древние греки построили на эту тему так называемый парадокс Сократа–Платона. Он имеет форму мини-диалога:

Сократ: «Сейчас Платон скажет правду.»

Платон: «Сократ только что солгал.»

Если заявление Сократа истинно, то истинно и утверждение Платона, которое объявляет заявление Сократа ложью. Если же заявление Сократа лживо, то лживо и утверждение Платона, отрицание которого должно быть истиной. Но отрицание утверждения Платона сводится к тому, что Сократ сказал правду! Круг замкнулся, и выхода из него нет.

В 1913 году была сформулирована ещё одна вариация этого парадокса, называемая «карточкой Журдена». Вообразите себе картонную карточку, одна сторона которой содержит надпись: «Суждение на обороте истинно». Вы переворачиваете карточку и видите там другую надпись: «Суждение на обороте ложно».

Это уже очень напоминает популярную шутку с телефонной будкой. Представьте, что вы зашли в будку и прямо над телефоном увидели сделанную кем-то надпись: «Повернись назад!». Вы разворачиваетесь, так что телефон остаётся сзади, а перед вами находится дверь. На двери написано: «Повернись налево!». Вы поворачиваетесь, и теперь слева от вас телефон, а справа дверь. Впереди боковая стенка будки с третьей надписью: «Обернись!». Ещё один разворот — телефон и дверь поменялись местами, впереди другая боковая стенка и на ней очередная надпись: «Повернись направо!». Если выполнить и это указание, то впереди опять появится телефон, надпись над которым требует повернуться назад. Программист сказал бы, что вы вошли во взаимную рекурсию четырёх функций без заданного условия выхода.

Такая ошибка является классической и любая книга по программированию обязательно укажет читателю на то, что рекурсия должна предусматривать некоторый *тривиальный случай*, при котором замыкание на себя не требуется. Так, для факториала этим тривиальным случаем является $0! = 1$.

А вот ещё пример. Находясь в гостях, вы наугад взяли с полки старую книгу. Её переплёт изрядно потёрт, так что название читается с большим трудом. В комнате не очень светло, так что вы не стали на этом заморачиваться и начинаете листать страницы. Подходит другой гость и задаёт вопрос: «Как называется эта книга?». Вы всматриваетесь в переплёт и начинаете разбирать стёртые буквы, которые постепенно складываются во фразу «Как называется эта книга?».

Ответ, который вы дадите, будет совершенно точен, но по своей форме полностью совпадёт с вопросом и — можно не сомневаться! — будет воспринят именно как повторение вопроса. Дальнейшее развитие событий полностью зависит от долготерпения (как вашего, так и подошедшего к вам гостя), и совсем нетрудно представить себе вариант, при котором кто-нибудь получит этой самой книгой по голове. ☺

В качестве иллюстрации того, к чему может привести ответ, по звучанию совпадающий с вопросом, я процитирую уже упоминавшуюся (см. предыдущий этюд) «Поправку-22» Дж. Хеллера.

Армейская дисциплинарная комиссия рассматривает поведение курсанта Клевинджера. В состав комиссии входят полковник (председательствующий), майор и лейтенант. Присутствует также капрал, умеющий стенографировать и ведущий протокол.

В определённый момент заседания полковник остался недоволен поведением майора и устроил ему выволочку. Закончив ораторство, он стал вспоминать, на чём же, собственно, остановилось заседание. С этим вопросом он обратился к капралу-стенографисту:

— Прочтите мне последнюю строчку стенограммы.

— «Прочтите мне последнюю строчку стенограммы» — прочёл капрал, который знал стенографию.

— Да не **мою** последнюю строчку, идиот! — загремел полковник. — А чью-нибудь ещё!

— «Прочтите мне последнюю строчку стенограммы», — прочитал капрал.

— Да это тоже **моя** последняя строчка! — завизжал полковник, становясь пунцовым от гнева.

— О нет, сэр, — запротестовал капрал. — Это уже **моя** последняя строчка, раз я прочитал её вам секунду назад. Неужели вы не помните, сэр, всего лишь секунду назад...

— Ах боже ты мой! Прочтите мне **его** последнюю строчку, идиот!

Результат заседания, которое целиком проходило в таком же духе, был восхитителен. Он сам по себе служит великолепным образчиком казуистической — она же армейская — логики и прекрасно завершает этот раздел этюдов:

Клевинджер, конечно, был виновен: иначе как же можно было бы его в чём-то обвинять! И поскольку единственный способ доказать его виновность заключался в том, чтобы признать его виновным, так и было сделано.

Ответы и пояснения к задачам

1. Рыцарь и оруженосец

Таких вопросов существует много. Вот четыре самых очевидных варианта: «Ты рыцарь?», «Ты правдив?», «Ты оруженосец?», «Ты лжец?». На первые два из них рыцарь и оруженосец ответят «да», на третий и четвёртый — «нет».

2. Разные ответы Платона

Эта задача в чём-то обратна предыдущей. Здесь также существует несколько возможных вариантов решений.

Например, некто мог задавать Платону такой вопрос: «Спрашивал ли я тебя об этом раньше?» (т.е., «Задавал ли я тебе этот вопрос раньше?»). Однако этот вариант небезупречен: Платон ответил бы по-разному лишь на первое («нет») и второе («да») вопрошание. Все дальнейшие его ответы были бы одинаково положительными.

Гораздо лучше следующий вариант: «Сколько вопросов я уже задал тебе?» Здесь Платон гарантированно ответит по-разному всегда.

3. Кошки и их хвосты

Ошибку можно объяснить по-разному. Один из вариантов таков: во втором предложении сравниваются хвосты существующих и несуществующих кошек. Но хвосты несуществующих кошек (сколько бы их там не заявлялось) также не существуют, и в действительности при сравнении с существующими кошками их количество следует считать равным нулю.

4. Два привратника

Нужно подойти к любому из двух привратников, указать на любую из дверей и задать вопрос: «если я спрошу твоего напарника, ведёт ли эта дверь к сокровищу, что он мне ответит?»

Полученный ответ гарантированно окажется лживым. Если был спрошен правдивец, то он точно передаст неверный ответ лжеца. Если был спрошен лжец, то он перевернёт точный ответ своего напарника-правдивца.

Итак, если на заданный вопрос был получен ответ «нет», то именно эта дверь и ведёт к сокровищу. Если же был получен ответ «да», то к сокровищу ведёт другая дверь.

5. Два электрических стула

В свете рассуждений предыдущей задачи решение не представляет трудности. Джо может спросить, например, так: «если завтра здесь будут казнить ещё кого-нибудь, и он спросит о том, какой стул исправен, что вы ему ответите?» Ответ гарантированно будет лживым, так что на указанный стул и нужно садиться. Вопрос легко переформулируется и для случая, когда нужен ответ типа «да/нет».

6. «Бла-бла-бла» и два туземца

На заданный вопрос «вы говорите правду?» и правдивец, и лжец должны были ответить одинаково: «да» (см. задачу № 1 про рыцаря и оруженосца). Поэтому туземец пониже явно был правдивцем: первая половина его утверждения («он сказал “да”») соответствует истине. Если так, то и вторая половина его утверждения (о том, что туземец повыше — лжец) является правдой. Получается, что высокий туземец принадлежит к племени лжецов, а низкий к племени правдивцев. Формально этот ответ абсолютно верен.

В действительности всё совсем не так просто. Есть вариант, что высокий туземец не только не любил иностранцев, но и не понимал языка путешественника. Может, его «бла-бла-бла» означало «понаехали тут!» или он просто послал спросившего куда подальше на своём наречии? Если так, то низкорослый — лжец, и его слова о лживости высокого также ложь. То есть всё оказывается наоборот: высокий правдив, а низкий лжец.

7. Расследование преступления

Допустим, что кричавший (назовём его *свидетелем*) является правдивцем. Если так, то его заявление истинно и преступник действительно лжец. Следовательно, свидетель не может быть преступником.

Допустим теперь, что свидетель является лжецом. Тогда его заявление лживо и преступление совершил правдивец. В этом случае свидетель также не может быть преступником.

Разумеется, эти рассуждения предполагают, что *свидетель был одним из коренных жителей острова*. Но хоть сколько-нибудь опытная полиция, конечно, легко отличит местного от приезжего.

8. Парадокс Эпименида

Отрицание утверждения «все критяне лжецы» имеет вид «среди критян есть хотя бы один правдивец». Пусть на Крите живёт $n \geq 2$ человек, одним из них является Эпименид, и он лжец. Пусть среди остальных $(n - 1) \geq 1$ человек хоть кто-то является правдивцем. Тогда заявление Эпименида ни к каким противоречиям не приводит.

Парадокс, описанный в примечании «о задаче», возникает, если Эпименид является *единственным* критянином. Вот тогда его утверждение действительно не может являться ни истинным, ни ложным. Этот случай называют «парадоксом лжеца» или «усиленным парадоксом Эпименида».

9. Протагор против Квантла

Поскольку Квантл ещё не выиграл свой первый процесс, судья постановил: Протагору в иске отказать. Однако, учитывая крайнюю сложность дела, он предоставил ему право повторно обратиться с жалобой, если тот отыщет какие-то новые аргументы или обстоятельства.

Это решение само по себе дало Протагору новый аргумент: Квантл выиграл свой первый процесс, а платить не стал. Поскольку теперь было налицо нарушение договора, во второй раз судья с чистой совестью вынес решение в пользу Протагора. Его Квантл был обязан выполнить, так как оно в противоречие с договором не вступало (о *втором* процессе там ничего не говорилось).

10. Индукция Пойа

Индукция построена безупречно и страдает лишь одним недостатком: индукционный переход с использованием транзитивности не работает в самом начале, когда нужно из 1-предположения получить 2-вывод. Соответственно, базой индукции должно быть утверждение не для $n = 1$, а для $n = 2$. Действительно, если бы было справедливым утверждение «любые две лошади имеют одинаковую масть», то доказываемый факт, безусловно, имел бы место. Увы, это не так.

11. Две страны

Такая возможность существует: путешественнику достаточно задать первому встречному вопрос «ты здешний?»

Если дело происходит в стране А, то её коренной житель честно ответит «да». Для гостя из страны Б правильным ответом было бы «нет», но иностранцу он солжёт и также скажет «да». Если же дело происходит в стране Б, то гость из страны А честно ответит «нет». Коренной житель солжёт иностранцу и вместо правды «да» также ответит «нет».

Итак, положительный ответ будет означать, что путешественник находится в А, а отрицательный свидетельствует о нахождении в стране Б. Однако, задавая свой вопрос, он должен быть уверен, что *спрошенный обязательно является жителем А или Б*.

12. Парадокс узника

Самое удивительное, что в построенной узником индукции нет никакой ошибки! Узник ошибался совсем в другом.

Поставим себя на место судьи (тот явно был не глупее). Существует две возможности: либо узник сможет построить такую индукцию, либо нет.

В первом случае узника можно казнить в любой день — даже и в воскресенье, ибо он будет уверен в помиловании и объявление о казни окажется для него большим сюрпризом (что и произошло). Во втором случае узник действительно будет трястись от страха в ожидании казни и его тоже можно казнить в любой день — желательно в начале или середине недели, чтобы избежать двусмысленности с воскресеньем.

Трудно поверить, но казнь была бы сюрпризом для узника в *любом* случае. Впрочем, логика всё же облегчила его участь: он хотя бы прожил свои последние дни спокойно.

Гораздо подробнее это объяснение приведено в книге М. Гарднера «Математические досуги» (глава 8 «Казнь врасплох и связанный с ней логический парадокс»), которая и рекомендуется всем заинтересовавшимся.

«Парадокс узника» рассматривается также в книге Г. Гамова и М. Стерна «Занимательная математика» (глава 1 «Великий султан», раздел «Казнь врасплох»). Впрочем, там легенда задачи излагалась по-другому: начальник тюрьмы симпатизировал узнику и построил эту индукцию, чтобы обосновать для себя невозможность казни, помиловать его. Соответственно, анализ противоречивости в этой книге не проводится.

Рекомендую также перечитать эту «Королевский розыгрыш», в котором также обыгрывается понятие *предупреждённой внезапности*.

13. Сорок неверных жён

Для начала предположим, что в королевстве всего одна неверная жена. Пусть её мужа зовут Джоном. Джон ничего не знает про верность или неверность собственной жены, но знает, что все остальные жёны в королевстве верны своим мужьям. Выход королевского указа означает, что неверные жёны у кого-то *есть*. (Король, сам будучи жителем своего королевства, тоже в курсе чужих неверностей!) Отсюда Джону нетрудно догадаться, что неверной является его собственная жена, и она была бы убита в первую же ночь. Все остальные понимают, что Джон, убивший собственную жену, исходил из знания о верности всех прочих жён королевства, и успокаиваются на свой счёт.

Пусть теперь в королевстве две неверные жены, мужей которых зовут Джоном и Биллом. Выход указа не удивляет никого в королевстве: Джон знает о неверности жены Билла, Билл знает о неверности жены Джона, а все остальные знают о неверности их двух жён. Джон рассуждает так: если моя жена верна мне, то Билл об этом знает, моментально вычислит неверность собственной жены (см. предыдущий абзац), и убьёт её в первую же ночь. Но и Билл рассуждает совершенно аналогично: если моя жена верна, то Джон, зная об этом, вычислит неверность своей жены и в первую же ночь убьёт её. Однако в первую ночь ничего не происходит. Джон с Биллом понимают, что их предположения о верности собственных жён были ложными, и во вторую ночь убивают своих жён. Все остальные мужья понимают, что если неверных жён было две (обе — чужие), то они будут убиты во вторую ночь, а если этого не произойдёт, то надо серьёзно задумываться о верности собственной супруги.

Дальнейшие рассуждения происходят по индукции аналогичным образом. Обобщение рассуждений выглядит так: если некто знает о неверности n жён и за n ночей не произошло убийств на почве неверности, то этот *некто* сам женат на изменнице и в $(n + 1)$ -ую ночь должен убить её.

Индукция о неверных жёнах подробно описана в той же книге Г. Гамова и М. Стерна, которая уже упоминалась в рассуждениях о решении предыдущей задачи (№ 12, «Парадокс узника»).