

---


# Школа трёх мудрецов


---


Михаил Баландин [michael.balandin@live.ru](mailto:michael.balandin@live.ru)



Многие подборки интересных математических задач составлены так, что их содержимое объединено общим сюжетом. Вот и я решил попробовать себя в этом жанре. Всё началось с четырёх задач (они приведены здесь под номерами 1, 2, 3, 5), к которым впоследствии присоединялись новые, так что в итоге общее количество дошло до полутора десятков. Тематика задач включает в себя логику, дележи, вероятность, множества, движение.




Считаю необходимым лишний раз напомнить золотое правило чтения любых книг по занимательной математике: *прежде, чем смотреть в ответ, нужно постараться приложить все силы к тому, чтобы попробовать решить задачу самостоятельно!*

Решение задач в подавляющем большинстве случаев не требует никаких специальных математических познаний. Если это не так и могут понадобиться дополнительные знания, то название сопровождается знаком книги: .

Сюжет не позволил приводить задачи по возрастанию сложности. Но к названию каждой задачи добавлена её характеристика в виде одного, двух или трёх значков .

 означает достаточно простую задачу, которая у большинства людей не должна вызвать никаких затруднений.

 означает задачу средней сложности, над которой придётся основательно подумать.

 означает реально сложную задачу или такую задачу, решение которой совершенно неожиданно. Если вам удастся решить одну из таких, то можете заслуженно гордиться собой — самостоятельно это удаётся весьма немногим!

В конце, как обычно, приведены пояснения к задачам и их решения. Кое-где есть дополнительные сведения и ссылки на книги, в которых что-то подобное рассматривается более подробно.

Итак —

*В некоторой восточной стране жили три известных мудреца — Абу, Али и Ахмед. У них была школа, в которой они учили детей и подростков.*

*Однажды про эту школу задумался султан соседней страны, который решил отдать в неё своего наследника, юного принца Омара. Разумеется, там были и собственные наставники, однако султан справедливо полагал, что вдали от дома принц мог бы научиться не только мудрости, но и самостоятельности.*

*С другой стороны, отдавать воспитание наследника в руки мудрецов чужой страны, не убедившись в их достоинствах, было никак нельзя. Поэтому султан отправил с принцем трёх своих мудрецов, велел им как следует испытать мудрость Абу, Али и Ахмеда, и только удовлетворившись результатами, оставить принца в их школе.*

*И вот посольство прибыло...*

## 1. Первое испытание мудрости



Первый чужеземный мудрец попросил Абу, Али и Ахмеда сесть треугольником, чтобы каждый из них видел двух других. Затем он достал из своей дорожной сумки здоровенный пучок больших птичьих перьев, одни из которых были чёрными, а другие белыми.

— Сейчас вам завяжут глаза, — сказал он, — и я воткну в чалму каждого из вас по одному перу. Потом повязки снимут. Вы будете видеть цвет перьев соседей. Поднимите руку, если увидите у кого-то белое. Своё же перо вы не будете видеть, но вам нужно угадать его цвет. Как только вам это удастся, встаньте и выйдите из комнаты. Я выйду следом и проверю вашу догадку.

Так и было сделано. Мудрецам завязали глаза, чужеземец воткнул в чалму каждого по белому перу. Затем глаза развязали. Проморгавшись, мудрецы посмотрели на своих соседей и все трое подняли руки. Прошло около минуты, и Абу вышел из комнаты. Следом вышел чужеземец, они пошептались там, а когда вошли обратно, автор испытания объявил, что полностью удовлетворён ответом и объяснением.

## 2. Второе испытание мудрости



Другой чужеземный мудрец попросил Абу сесть на своё прежнее место и выбрал из того же пучка перьев три чёрных и два белых. Этого, как сказал он, будет довольно для придуманного им испытания.

— Я тоже воткну в каждую чалму по перу, — объявил он условия. — Какое-то одно из этих пяти. Всё будет точно как прежде, но теперь вы должны узнать цвет своего пера, не обмениваясь друг с другом никакой информацией!

Глаза завязали, чужеземец воткнул в каждую чалму по чёрному перу, а оставшиеся два белых спрятал обратно в пучок. Затем повязки сняли, и через некоторое время Ахмед воскликнул:

— У меня чёрное перо!

Мудрец, придумавший второе испытание, также признал, что удовлетворён результатом.

## 3. Третье испытание мудрости



Третий чужеземец заявил, что ему удалось придумать задачу посложнее. Он взял из того же пучка четыре белых и четыре чёрных пера, которые показал Абу, Али и Ахмеду.

— Теперь в каждой чалме будет по два пера из этих восьми! — сказал он. — Вы опять должны узнать их цвет. Когда вам развяжут глаза, я буду задавать вопросы, а вы отвечайте на них вслух и думайте над услышанными ответами.

Глаза завязали, в каждую чалму воткнули по два пера, а оставшиеся два спрятали обратно в пучок.

Потом глаза развязали и чужеземец спросил у Абу, знает ли тот, какого цвета перья в его чалме. Абу посмотрел на своих соседей, чуть подумал и ответил отрицательно. Затем тот же вопрос был задан Али и Ахмеду, которые также ответили отрицательно.

Чужеземец снова повернулся к Абу и спросил всё о том же. Абу опять ответил отрицательно. Однако, когда этот же вопрос был во второй раз задан Али, тот вдруг воскликнул «Знаю!» и прошептал свой ответ приезжему мудрецу на ухо.

Тот развёл руками и признал правоту Али.

## 4. Лепёшки и монеты



Мудрость Абу, Али и Ахмеда была должным образом подтверждена, и послы со спокойной совестью отправились домой, оставив юного принца учиться в школе.

Омара поселили в комнате с двумя другими мальчишками, Юсуфом и Мамедом, которых взяли учиться за пару дней до того. Они были из бедных семей, но детей это ничуть не смущало и они легко сошлись.

В первый день Омар, конечно, изрядно устал и проголодался с дороги. А за всеми переговорами и испытаниями уже наступил вечер и школьная кухня не работала! К счастью, у Юсуфа и Мамеда было с обеда заначено по несколько лепёшек: четыре у Юсуфа и шесть у Мамеда.

Они поделились с принцем, так что все десять лепёшек были поровну разделены на троих и съедены. Омар подумал и сказал:

— Вот что. У моего отца денег много и ему для меня ничего не жалко. Вы сейчас вроде как оказали мне услугу. Давайте я вам за неё вроде как заплачу, а вы отдадите эти деньги своим семьям.

И он вытащил десять золотых монет. Его соседи стали было отказываться, но для бедных семей это было целое состояние, а принц предложил от чистого сердца...

В общем, Омар оставил им деньги и завалился спать, а Юсуф и Мамед стали обсуждать, как справедливо разделить эти десять монет.

Через некоторое время Омара пихнули в бок и спросили его мнение по этому поводу.

— Разделите пополам... — буркнул он первое пришедшее в голову, переворачиваясь на кровати.

— Так это неправильно! — возмутились соседи. — Лепёшек-то у нас было не поровну!

Омар понял, что просто так уснуть ему уже не дадут. Он разлепил глаза и стал считать.

Ответ его удивил. Принц перепроверил два раза, но всё было верно.

— Разделите поровну! — повторил он свой исходный совет. — Правильный способ вам обоим не понравится.

— Ты скажи, а мы уж сами решим! — потребовали Юсуф с Мамедом.

Омар сказал, и им действительно не понравилось. Теперь они потребовали от принца объяснить этот способ. Но тот уже настолько хотел спать, что отговорился фразой «давайте лучше завтра спросим учителя, прав ли я».

Назавтра они подошли к одному из наставников (это был Али) и рассказали, как было дело.

Али подтвердил правоту принца и трижды похвалил его: за щедрость, сообразительность и стремление к справедливости. Юсуф с Мамедом согласились, что правильный способ не всегда самый лучший и поделили деньги пополам.

## 5. Прodelка принца



Принц Омар был просто в восторге от того, что на время учёбы избавился от родительской опеки, и в первую же неделю напраказничал.

В жаркий час послеобеденного отдыха три наставника прилегли в тенистом саду и незаметно для себя задремали. Принц, увидев их спящими, обмакнул палец в грязь и пририсовал каждому усы, а сам спрятавшись в кустах, чтобы посмотреть за реакцией мудрецов при пробуждении.

Когда Абу, Али и Ахмед проснулись, они глянули друг на друга, чуть улыбнулись, но тут же хором, в один голос, заявили:

— Не смешно!

После чего отправились к фонтану умываться.

Омар был очень разочарован. Он-то думал, что каждый из мудрецов будет смеяться над чужими усами, ничего не подозревая о собственных. А тут каждый из них с первого же взгляда как-то определил, что и его лицо испачкано!..

## 6. Демографическая политика



Однажды в школу трёх мудрецов приехал высокий чиновник из соседней страны (не той, откуда прислали учиться принца Омара). Он заявил, что его прислал за советом великий визирь, озабоченный новым законом, недавно изданным в той стране.

Оказывается, тамошний султан был весьма охоч до женского пола и держал огромный гарем.

Настал день, когда он задумался о том, что в результате этой наклонности у него будет очень много детей, и сыновей нужно будет сделать принцами и вельможами, а если они унаследуют его страсть, то им тоже понадобятся огромные гаремы, и у них тоже будет много детей, и так далее... В общем, султан пришёл к мысли, что для обеспечения будущих гаремов своим любвеобильным потомкам неплохо бы изменить в стране баланс населения в сторону увеличения количества женщин.

Тогда он подумал ещё немного и издал соответствующий закон. По этому закону всем женщинам страны разрешалось рожать детей лишь до тех пор, пока не родится первый сын. Родившим девочку разрешалось заводить ещё детей, родившим же мальчика запрещалось. Теперь у каждой женщины

могло быть не более одного сына (за исключением, разумеется, случаев рождения близнецов — против судьбы не пойдёшь).

— Великий визирь очень обеспокоен, — пояснил приезжий. — Люди ведь не зря устроены так, что мальчиков и девочек рождается примерно поровну. Никому не известно, к чему может привести нарушение равновесия, и он хотел бы знать ваше мнение на этот счёт.

Абу, Али и Ахмед подумали, посоветовались, и сказали чиновнику следующее:

— Ваш визирь очень мудр. Он совершенно прав, считая, что нарушение равновесия может привести ко многим бедам. Но в данном случае беспокоиться не о чем. Султан перехитрил сам себя, и принятый им закон не изменит соотношение мужчин и женщин в стране. Живите спокойно!

## 7. Разбитое окно



Дети, учившиеся у трёх мудрецов, были гораздо смыслённее своих сверстников (иначе они просто не попали бы в эту школу). Но во всём остальном они оставались самыми обычными детьми.

Свободное от занятий время ученики проводили в играх и, как это часто бывает, игры не обходились без досадных неприятностей.

Однажды Ахмед шёл по двору и услышал звон разбитого стекла. Быстро (насколько позволяли годы) завернув за угол, он заметил трёх удирающих мальчишек.

В этот раз старческая дальnozоркость сослужила мудрецу хорошую службу: он безошибочно узнал всех троих и окликнул их по именам:

— Юсуф! Мамед! Омар! А ну-ка, быстро идите ко мне!

Бегство потеряло смысл, и все трое подчинились.

— Ну, и кто из вас разбил окно?! — грозно спросил наставник.

Никто ничего не сказал. Конечно, провинность была пустяковой и ничего страшного за неё не грозило (так, — помощь стекольщику, да пара дней мытья посуды на кухне), но всё равно наказание есть наказание...

— Ты? — мудрец указал на Юсуфа.

Тот сразу же отпёрся:

— Это не я, это Мамед!

— Это не я, это Омар! — столь же быстро отпёрся Мамед.

Тут принц показал, что при дворе ему не зря внушали идеи о чести и благородстве. Он не стал «переводить стрелки» и гордо заявил:

— Не я, а кто — не скажу!

Очевидно было, что из трёх мальчиков один соврал, а двое других сказали правду. Конечно, Ахмед быстро определил настоящего виновника, иначе он не был бы мудрецом...

## 8. Суд по жребиям



В тот день в школу пришёл старик-крестьянин, которого хорошо знал Ахмед. Они были друзьями детства, а сейчас крестьянин поставлял для школы кое-какие продукты.

Было видно, что старик убит каким-то горем. Увидев Ахмеда, он воскликнул:

— Моего сына могут осудить за преступление, которого он не совершал! Помогите мне!

Ахмед отпустил учеников, дав им какое-то задание, и позвал Абу (тот происходил из судейского сословия и его советы могли очень даже пригодиться).

Старик рассказал, что его младший сын оказался главным подозреваемым в сложном и запутанном преступлении. Обстоятельства дела были таковы, что доводы «за» и «против» звучали одинаково убедительно. Юноша не совершал преступление, потому что в тот момент находился в другом месте, но подтвердить это мог только его отец, а свидетельство родителя в пользу ребёнка по закону не имело веса.

Закон также говорил, что в подобных случаях виновность или невиновность подозреваемого должна определяться жребием.

Абу и Ахмед внимательно выслушали крестьянина, и у них не возникло никаких сомнений, что тот сказал им чистую правду. Они отправили его посидеть в саду, а сами стали думать.

— Может, ты поговоришь с судьёй? — предложил Ахмед самое очевидное решение. — Законники уважают тебя, и он наверняка прислушается к твоему мнению...

Но Абу покачал головой:

— Я хорошо знаю судью, это умный и порядочный человек. Поверь, если уж он назначил испытание жребием, значит, ничего другого действительно не оставалось. Значит, факты и впрямь говорят «за» и «против» юноши абсолютно одинаково. Не может же судья нарушать закон, и я не могу его в этом уговаривать...

— А что представляет собой жребий?

— В судебном зале стоят два кувшина, а в каждом по десятку камешков. В одном чёрные, в другом белые. Перед испытанием их вытряхивают и показывают всем присутствующим, в том числе подозреваемому. Все убеждаются, что подвоха нет. Потом камешки кладут обратно, подозреваемому завязывают глаза, и кувшины несколько раз переставляют. Глаза развязывают и подозреваемый достаёт один камешек из любого кувшина. Чёрный означает вину, белый невиновность.

— А по десятку-то камешков зачем? — удивился Ахмед. — Вполне хватило бы и по одному.

— Просто традиция. Когда-то сквозняком опрокинуло один кувшин, и подозреваемый увидел цвет камешка. Долго спорили, как тут быть, пришлось повторять процедуру... С тех пор стали класть по десятку для веса и устойчивости. Сейчас кувшины медные, их так легко не опрокинешь, но традиция осталась.

Тут Ахмеду пришла в голову мысль.

— Послушай-ка... — медленно проговорил он. — А если ты попросишь судью разрешить юноше самому разложить камешки по кувшинам? На это он согласится?

— Думаю, что да, — ответил Абу. — Если это будут те же два кувшина и те же двадцать камешков, то ни закон, ни традиция не будут нарушены... О, я понял, что ты придумал!

Они обсудили эту мысль со всех сторон, не нашли в ней изъянов и пошли к отцу юноши.

— Послушай, — сказал ему Ахмед. — Мы не в силах добиться оправдания твоего сына, зато нам удалось придумать, как повысить его шансы на испытании. Сейчас у него есть один шанс из двух, а будет три шанса из четырёх. Ну, на самом деле чуть меньше, но совсем чуть-чуть. Пока он ещё не осуждён, тебе ведь разрешают с ним видеться?

Старик ответил утвердительно.

— Отлично. Передай ему, чтобы перед жребием он попросил судью разрешить ему самому разложить камешки по кувшинам. Судья согласится, Абу сегодня с ним поговорит. Твой сын должен сделать это вполне определённым образом, и тогда его шансы заметно возрастут.

## 9. Стадо верблюдов



Пока Ахмед и Абу размышляли над делом крестьянина и его сына, Али вёл своё занятие. Он решил разобрать с учениками историю про десять лепёшек и десять монет, слухи о которой уже успели разойтись по школе.

Подробно всё объяснив, он продолжил тему дележей и рассказал детям старую легенду о бедуине, который оставил трём своим сыновьям 17 верблюдов и завещал  $\frac{1}{2}$  стада старшему сыну,  $\frac{1}{3}$  среднему и  $\frac{1}{9}$  младшему. Сыновья никак не могли поделить стадо (ведь 17 не делится ни на две, ни на три, ни на девять частей) и обратились за советом к мудрецу.

Мудрец приехал на собственном верблюде и добавил его к стаду. Верблюдов стало 18, так что половина их (9) была отдана старшему сыну, треть (6) среднему и девятая часть (2) младшему. Один оставшийся верблюд ( $17-9-6-2=1$ ) как раз и был верблюдом мудреца. Завещание было в точности выполнено, каждый из братьев получил больше, чем рассчитывал изначально, мудрец уехал восвояси, оставшись при своём верблюде, а братья вообще перестали что-либо понимать в происходящем.

— Так всё очень просто! — воскликнул кто-то из детей. — Эти братья плохо умели считать, только и всего. Ведь если сложить их доли, то получится не единица, а  $\frac{17}{18}$ , отсюда и все непонятки!

— Правильно! — похвалил его Али. — Но у этой легенды есть и другой вариант. В нём братья сами поделили 17 верблюдов точно по завещанию, причём верблюдов не пришлось резать на части, и

ничего не нужно было добавлять, и ничего лишнего после дележа не осталось! Могу добавить, что это был совсем другой делёж, не совпадающий с предыдущим ни единым числом. Сумеете найти?

С полчаса Али усмехался в бороду, глядя на споривших и доказывающих что-то друг другу учеников. Потом стало очевидно, что этот вариант легенды им не удастся воссоздать (да наставник с самого начала так и думал), и он рассказал им решение. Все были поражены его неожиданностью.

## 10. Мешок риса на троих



Далее Али сказал:

— Очень интересные ситуации возникают, когда делить приходится что-то такое, что нельзя сосчитать.

— Как это? — спросили ученики.

— Ну, к примеру, мешок риса. Не пересчитывать же его по зёрнышку.

— А в чём сложности? — спросил принц Омар. — Взять весы или мерку...

— А если их нет? Кстати! — тут в голову Али пришла идея. — Мамед и Юсуф, принесите-ка немного песку, чтобы можно было насыпать горку...

Когда песок принесли, Али велел двум мальчикам сесть возле горки и обратился к принцу:

— Представь, что ты вырос и стал султаном. Ты поехал... скажем, на охоту. И встретил двух крестьян, которые обратились к своему султану с просьбой разделить им по справедливости рис. Вот, Мамед и Юсуф будут крестьянами, а песок рисом. Весов или мерки у них нет, и ты ничего такого на охоту не взял.

Омар пожал плечами и присмотрелся к горке песка. Изучив со всех сторон, он разгрёб её на две меньшие кучки и объявил:

— Пожалуйста. Эта кучка Мамеду, а эта Юсуфу.

— Мамед, одинаковы ли кучки? — спросил Али.

— Не знаю... — неуверенно сказал тот. — Вроде, вот эта чуть побольше...

— Юсуф?

— Точно, эта больше!

— Видишь, Омар? Будь всё по-настоящему, один крестьянин считал бы, что ему повезло, а другой завидовал бы и чувствовал себя обиженным.

— Ну и что! — воскликнул юный принц. — Если султан... да хоть бы и любой посторонний разрешил их спор, они всё равно должны подчиняться решению. Что бы им там не казалось.

— Сразу видно придворное воспитание, — улыбнулся Али и пояснил другим ученикам: — Всё так. Любой судья скажет вам, что если два человека попросили третьего решить их спор, и ни один из них не возразил против этого посредника, то оба обязаны выполнить его решение, каким бы оно ни было. Но согласись, Омар, что гораздо лучше разделить рис так, чтобы вообще исключить возможность недовольства. Попробуй ещё раз.

Принц сгрёб две кучки в одну и задумался, что-то бормоча себе под нос. Остальные ученики тоже шептались, обсуждая задачу.

— Кажется, придумал! — заявил принц через несколько минут. — Мамед, а попробуй-ка *ты* разделить этот песок... то есть рис.

Тот выполнил просьбу и долго равнял две получившиеся кучки, передвигая от одной к другой маленькие порции песка. Наконец он сказал «готово!».

— Тут поровну? — спросил Омар.

— Ну да. Во всяком случае, я старался как мог.

— И ты взял бы себе любую кучку?

— Да, я же сам делил.

— Юсуф, а тебе из этих двух кучек какая больше нравится?

Юсуф присмотрелся, подумал, и показал пальцем:

— Я бы взял вот эту!

— Бери её. А ты, Мамед, возьми оставшуюся.

— Очень хорошо! — воскликнул Али. — Вот это решение, достойное настоящего султана! Теперь ни у кого из крестьян не может быть никаких обид. Но давайте усложним задачу. Представим, что рис нужно поделить уже на троих. Как быть?

— Делить явно должен кто-то один из них! — сразу сказал Омар. Мамед и Юсуф согласно закивали.

— Что ж, попробуйте придумать такой метод. А вы, — сказал Али остальным, — тоже разбейтесь по трое и ищите своё решение.

На этот раз прошло значительно больше времени, прежде чем один из учеников додумался до правильного ответа.

## 11. Мешок риса на четверых



После того, как «мешок риса» был благополучно поделен между «тремя крестьянами», наставник Али отпустил учеников, велел им к завтрашнему дню подумать над ещё более сложной задачей. Теперь нужно было изобрести метод, позволяющий разделить нечто без всяких обид *на четверых*.

## 12. Помилование и три узника



Через несколько дней в школу зашёл молодой крестьянин — тот самый, виновность или невиновность которого должны были определить жребием. Он долго благодарил Ахмеда и говорил, что его оправдали именно потому, что он последовал совету мудреца. Ахмед терпеливо выслушал все эти благодарности и пожелал юноше впредь не попадать в такие ситуации.

Их разговор слышали многие ученики, так что на своём очередном уроке Ахмед рассказал всю эту историю, дав подробные объяснения.

— Но ведь крестьянина всё равно могли осудить? — спросил кто-то. — За это был один шанс из четырёх, даже чуть-чуть больше.

— Увы! — вздохнул наставник. — Бывает, что и самый хитроумный мудрец ничего не может изменить. Хорошо уже то, что мы с Абу смогли придумать способ повысить шансы юноши. Иногда и это нельзя сделать. А бывают такие сложные случаи, когда даже шансы на успех оценить не удаётся...

— Да ну?! — усомнился принц Омар. — Но это же так просто!

— Думаешь? — улыбнулся наставник. — Хорошо, давай представим себе такую ситуацию.

Допустим, что ты, Юсуф и Мамед сидите в тюрьме (да сохранит вас от этого судьба!), каждый в своей камере. Но вот близится праздник... а он, кстати, и впрямь близится... и султан решил отпустить одного из узников. Кандидатами на помилование оказались как раз вы трое. Султан с судьёй бросили жребий и определили, кто именно будет отпущен. Наверняка ведь твой отец не раз так поступал?

— Да, — подтвердил Омар. — Так у нас обычно и делается перед праздниками.

— У нас тоже. Теперь представь, что до тебя дошли слухи о помиловании одного из вас. Как ты оцениваешь свои шансы выйти на свободу?

— Конечно, один шанс из трёх! — не задумываясь, ответил принц.

— Совершенно верно. Тюремщик знает, кто именно помилован — это ему ведь предстоит в день праздника выпустить узника, — но имеет приказ не называть имя раньше времени. Однако ты уговорил его назвать тебе имя того, *кто точно не будет освобождён*. Кроме, конечно, твоего собственного. Такое ведь всегда можно сделать. Если освободят Юсуфа, то можно назвать Мамеда. Если освободят Мамеда, то можно назвать Юсуфа. А если освободят тебя, то тюремщик может назвать любого из них. И вот он сообщил тебе, что Юсуфа точно не освободят. Если он сказал тебе правду, то каковы теперь твои шансы выйти на свободу?

— Один шанс из двух, — сказал Омар. — Ведь мне известно, что помилован либо я, либо Мамед.

— Допустим... Но пойдём дальше. Твоя камера имеет общую стенку с камерой Мамеда.

Перестукиваясь с ним, ты сообщил ему новость. А каковы его шансы на помилование?

— Точно такие же. Один из двух.

— Мамед, а ты как думаешь?

— Не уверен... ой, а тюремщику известно, что Омар может со мной перестукиваться?

— Неплохой вопрос! — одобрил Ахмед. — Нет, будем считать, что он об этом не знает.

— Мои шансы точно не ниже, чем у Омара. Выше могут быть, ведь тюремщик наверняка постарается запутать его за мой счёт, раз он не знает, что Омар расскажет мне. И одинаковыми могут быть. А ниже нет. Но какие именно, я не знаю.

— С такими рассуждениями недолго и самому запутаться... — покачал головой наставник. — Но что ж, ты всё-таки сумел сделать правильный вывод. А вот Омар совсем неправ.

### 13. Верблюды и стойла



Праздник, который Ахмед упоминал в предыдущей истории, многие ученики провели дома. Но вот все вернулись в школу, и Абу, придя на урок, услышал, как Юсуф говорит другим ученикам:

— Мне тут дядя-караванщик рассказал одну хохму...

Увидев, наставника, Юсуф замолчал и сел на своё место, но Абу кивнул ему:

— Давай-давай, рассказывай. Вполне возможно, что из этого может получиться тема для урока.

— Ну, в общем, это история о караванщике, у которого было девять верблюдов, а в караван-сараяе, куда он пришёл, нашлось только восемь свободных стойл. Но он был уже уставший и сказал, что никуда больше не пойдёт, и сумеет, если надо, расставить девять верблюдов по восьми стойлам. Сначала он временно поставил первых двух верблюдов возле первого стойла — вдвоём-то они туда не помещались. Потом он поставил третьего верблюда во второе стойло, четвёртого в третье, пятого в четвёртое, шестого в пятое, седьмого в шестое, восьмого в седьмое. Осталось как раз одно свободное стойло и один, последний, верблюд. Тогда караванщик вернулся к первому стойлу, взял одного из двух стоявших возле него верблюдов и отвёл в восьмое стойло. А другому верблюду, что стоял там же, это первое стойло и досталось. Так он всех и разместил.

— Отличная шутка! — рассмеялся Абу. — Надеюсь, ты сам сумел разобраться, в чем тут дело?

— Конечно! Там на самом деле было восемь верблюдов, но одного из них посчитали дважды: сначала как первого или второго, а потом как девятого. Вот и создаётся впечатление, будто их девять.

— Молодец, всё правильно. Но что ты скажешь, если я заявлю, что в караван-сараяе со всеми занятыми стойлами можно разместить ещё одного верблюда, причём честно, без всяких словесных подвохов?

— Да ну! — усомнился Юсуф, и остальные ученики согласно загудели.

— Можно. Правда, это должен быть особенный караван-сарай. Попробуй представить себе, что количество стойл в нём бесконечно.

— Что-то не очень получается, — честно признался мальчик.

— Хорошо, давай скажем так. Есть очень большой караван-сарай с очень-очень большим количеством стойл. И все стойла в нём пронумерованы. Это ты можешь представить?

— Это могу.

— Теперь представь себе, что ты называешь номер — любой номер — и, если хорошенько поискать, то где-нибудь обязательно найдётся стойло с номером, ещё на единицу бóльшим. Так тебе проще?

— Пожалуй, да.

— Ну вот. В этом караван-сараяе все стойла заняты.

— То есть, если я назову любой номер, то в стойле с этим номером уже есть верблюд?

— Именно так! А теперь к тебе приводят ещё одного верблюда и просят его разместить. Это можно сделать, как бы странно ни звучало утверждение.

Юсуф озадаченно нахмурился и забормотал себе под нос, что-то прикидывая на пальцах.

— Невозможно! — заявил он наконец. — Ведь если в стойле с любым номером уже есть верблюд, то я могу назвать любой номер, и мне скажут «а это стойло уже занято!». И я никуда не смогу поставить нового верблюда.

— Это так. Но можно переставить уже размещённых верблюдов так, что одно стойло освободится. Для этого достаточно каждого верблюда перевести в стойло с номером на единицу больше нынешнего. Первое останется пустым. А для любого верблюда стойло с бóльшим номером обязательно найдётся, и его освободят, переведя того верблюда в следующее стойло, которое обязательно найдётся... ну и так далее.



— Да ведь эта перестановка никогда не кончится! — ужаснулся Юсуф.

— А тебе-то что? — подал голос принц Омар. — У верблюдов есть хозяева. Ты просто объявляешь, и они сами всех переводят.

— И вообще, — добавил Мамед, — если уж мы допустили, что такой караван-сарай существует, то об этом можно не думать. Тоже допустим, что как-то оно там произойдёт, и все дела.

— Совершенно верно! — подтвердил Абу. — Это ведь происходит только у нас в воображении. Вообразим ещё одно допущение, главное что задача решена. Более того, в таком караван-сараяе, когда он полностью занят, можно разместить не одного, а бесконечно много новых верблюдов!

— В том же самом смысле? — уточнил кто-то. — На каждом прибывшем верблюде написан номер, и какое число не назови, найдётся верблюд «номер на единицу больше»?

— Да.

Все надолго задумались.

## 14. Караван и пустыня



Когда общими усилиями задача была решена, Абу сказал:

— Юсуф, твой дядя-караванщик говорил тебе, что величину каравана нельзя увеличить сверх некоторого предела?

— Да, много раз. Чем больше верблюдов, тем больше нужно охранников, тем больше припасов придётся взять, тем меньше будет доля ценного груза...

— Отец говорил мне почти так же! — воскликнул Омар. — Он объяснял, что слишком большое войско невыгодно для страны.

— Истинная правда. Здесь действуют одни и те же законы. А когда войско в походе, то оно вообще почти ничем не отличается от каравана. разве что разбойников опасаться не приходится. Поэтому следующая задача важна для султана ничуть не меньше, чем для караванщика. В отличие от прошлой, она будет вполне реальной.

И Абу стал рассказывать:

— Представим себе большой город стоящий на краю пустыни. Из города выходит караван, которому нужно во что бы то ни стало пустыню пересечь. Ширина пустыни составляет 800 полётов стрелы (ПС), а караван может взять с собой припасов столько, чтобы пройти 500 ПС. Но можно ведь оставить часть припасов «про запас» в пустыне, а потом вернуться в город и взять ещё: город большой, там всего хватает. Караван может оставить для своего будущего пути сколько угодно таких схронов и с любым количеством припасов. А теперь попробуйте-ка определить, можно ли при таких условиях пересечь пустыню, и если да, то как именно должны действовать караванщики?

— Здесь, наверно, предполагается, что в пустыне никаких оазисов нет и караван может полагаться только на собственные припасы и то, что было им же оставлено заранее? — уточнил Омар.

— Да. И определите ещё, любую ли пустыню может пересечь такой караван.

## 15. Всадник и караван



Заканчивая это занятие, Абу предложил ученикам подумать над следующей задачей, также имеющей отношение к движению каравана:

— Длина каравана составляет один ПС. Его обгоняет всадник. Вот он поравнялся с самым задним верблюдом, затем доехал до середины, затем поравнялся с «головой». Караванщик, ведущий первого верблюда, попросил всадника передать что-то в «хвост». Всадник мгновенно развернулся и поехал назад с той же скоростью. Скоро он вновь поравнялся с самым задним верблюдом и передал то, о чём его просили. Между этими двумя встречами всадника и «хвоста» протекло время, за которое караван успел пройти расстояние, равное собственной длине. Спрашивается, какое расстояние за это время пришлось проехать всаднику?

*Нет никакого сомнения, что трём мудрецам и их ученикам пришлось столкнуться ещё со множеством не менее интересных задач. Однако, чтобы рассказать о них о всех, пришлось бы потратить несколько месяцев, а то и лет!*

## Ответы

---

### 1. Первое испытание мудрости

---

Абу рассуждал так. «Предположим, что у меня чёрное перо. Тогда Али видит перед собой чёрное перо у меня, белое у Ахмеда и две поднятые руки, означающие, что мы с Ахмедом видим белое перо. В этих условиях Али легко догадался бы, что у него в чалме чёрного пера быть не может: ведь в противном случае Ахмед, видел бы перед собой *два* чёрных пера и просто не поднял бы руку. Но Али молчит и значит, моё предположение о чёрном пере в моей чалме неверно!»

### 2. Второе испытание мудрости

---

Ахмед рассуждал так. «Предположим, что у меня белое перо. Значит, Абу видит перед собой белое перо у меня и чёрное у Али. Он понимает, что если бы Али видел перед собой два белых пера, то сразу сказал бы, что у него чёрное. Но Али молчит, значит он видит у Абу чёрное перо, и Абу быстро бы это угадал, если моё начальное предположение правильно. А раз Абу молчит, значит, оно неправильно и у меня чёрное перо!»

*Если как следует вдуматься, то в первых двух испытаниях есть слабое место. Оно заключается в том, что мудрец, решивший задачу первым, неявно опирается на какую-то информацию о скорости мышления двух других мудрецов и свои соображения о том, успели или не успели бы они за прошедшее время прийти к тем или иным выводам. Третье испытание лишено этого недостатка: в нём введено дискретное время.*

### 3. Третье испытание мудрости

---

У Али имеются три возможности. Его перья могут быть: 1) оба чёрными; 2) оба белыми; 3) разноцветными. Предположим для начала, что оба пера чёрные.

После того, как все трое ответили по одному разу, Абу мог бы рассуждать так: «У Али два чёрных пера. Значит, у меня в чалме не может быть двух чёрных перьев, ведь тогда Ахмед видел бы перед собой *четыре* чёрных пера и сразу сказал бы, что у него могут быть только белые.» Совершенно аналогично, двух чёрных перьев не могло быть и у Ахмеда, ведь тогда Абу сразу понял бы, что у него два белых.

Но, может быть, у Абу было два белых пера? Тоже нет. Ведь, будь это так, Ахмед видел бы перед собой два белых и два чёрных пера. Он тотчас понял бы, что у него самого не может быть одноцветных перьев — ведь тогда либо Абу, либо Али видели бы *четыре* одноцветных пера и мигом догадались бы о цвете своих собственных.

Итак, будь у Али в чалме два чёрных пера, Абу смог бы догадаться, что в его собственной чалме перья разноцветные. Но, будучи спрошенным во второй раз, Абу снова сказал, что не знает ответа! Значит, перья в чалме Али не были оба чёрными.

Совершенно аналогично, с теми же самыми рассуждениями, они не могли быть и оба белыми. Оставалась только одна возможность — разноцветные — и, будучи спрошен второй раз, Али назвал чужеземному мудрецу именно её.

*О задаче.* Авторство этого реально сложного логического этюда принадлежит Раймонду Смаллиану, который был известнейшим мастером составления такого рода головоломок.

### 4. Лепёшки и монеты

---

Всего было 10 лепёшек, которые поделили поровну на троих, так что каждый съел по  $\frac{10}{3}$  лепёшки. Каждая из десяти монет, таким образом, соответствует каждой съеденной принцем трети лепёшки.

У Юсуфа было четыре лепёшки, из которых он  $\frac{10}{3}$  съел сам, а принцу отдал  $4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$ . Соответственно, «по справедливости» ему полагается взять две монеты из десяти. А у Мамеда было

шесть лепёшек, из которых  $\frac{10}{3}$  он также съел сам, а принцу отдал  $6 - \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$ , так что ему полагается взять восемь монет.

Учитывая, что у двух мальчиков лепёшек было почти поровну, и поделились они одинаково охотно, получается действительно как-то не очень хорошо!

## 5. Прodelка принца

---

Нет ничего удивительного, что мудрецы сразу всё поняли. Сам того не подозревая, принц в точности воспроизвёл их первое испытание. Только теперь вместо белых и чёрных перьев были чистые и испачканные лица, а вместо поднятия рук — смех при виде чужих усов. Едва увидев нарисованные усы и улыбки на чужих лицах, Абу, Али и Ахмед тут же вспомнили недавние события и отправились умываться.

## 6. Демографическая политика

---

Принятый султаном закон каждый раз исключает из процесса воспроизводства населения тех женщин, которые родили мальчика. Однако при этом в каждом новом поколении мальчиков и девочек рождается поровну, так что соотношение мужской и женской частей населения никак не будет меняться. Действие закона приведёт лишь к определённому снижению рождаемости.

## 7. Разбитое окно

---

Если Омар солгал, то это он разбил окно. Тогда получается, что солгал и Юсуф, называющий виновником Мамеда. Итак, Омар сказал правду, и окно было разбито не им.

В таком случае получается, что лжёт Мамед, называющий виновником Омара, и это именно Мамед разбил окно. Слова Юсуфа оказываются правдой, так что всё сходится.

## 8. Суд по жребью

---

Ахмед посоветовал юноше положить один белый камешек в один кувшин, а все остальные камешки (девять белых и десять чёрных) в другой.

Если бы юноша сунул руку в кувшин с одним камешком (что происходит с вероятностью  $\frac{1}{2}$ ), то он гарантированно — т.е. с единичной *условной* вероятностью — был бы признан невиновным. Если бы он сунул руку в кувшин с 19-ю камешками (что также происходит с вероятностью  $\frac{1}{2}$ ), то *условная* вероятность его оправдания составляла бы  $\frac{9}{19}$ .

Общая вероятность оправдания, стало быть, составляет  $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{14}{19} \approx 0.7368421$ .

Судя по началу задачи № 12, юноша скорее всего попал рукой в кувшин с одним белым камешком...

## 9. Стадо верблюдов

---

В другом варианте легенды братья вообще ничего не знали о дробях. Дробь  $\frac{1}{2}$  была воспринята ими как «два и один сверху», то есть как 3. Аналогично они решили, что  $\frac{1}{3} = 4$  и  $\frac{1}{9} = 10$ . Поскольку  $3+4+10=17$ , они подумали, что именно так и завещал им отец! (Конечно, младшему почему-то досталось больше, чем старшему... ну так что ж, ведь против отцовской воли-то не пойдёшь...)

## 10. Мешок риса на троих

---

Кто-нибудь один, например, Юсуф, делит рис на три равные по его мнению кучки. Тем самым он готов взять любую из них.

Второй — пусть им будет Омар — выбирает из них самую по его мнению маленькую и говорит: «Эту я не хочу!».

Теперь очередь Мамеда. Если и он не хочет эту же кучку, то она отдаётся делившему Юсуфу. Раз Омар и Мамед не хотят её, значит, они считают, что она содержит менее  $\frac{1}{3}$  всего риса.

Соответственно, две другие кучки по их мнению должны содержать более  $\frac{2}{3}$ . Эти две кучки они соединяют вместе и делят между собой по способу, описанному Омаром.

Если же Мамед согласен взять эту кучку, то он забирает её. Две оставшиеся Омар и Юсуф делят между собой: Омар берёт ту, что нравится ему больше, а деливший Юсуф забирает последнюю.

## 11. Мешок риса на четверых

---

Допустим для определённости, что четвертым делящим является сам Али. Тогда схема дележа выглядит следующим образом.

Кто-то, например, снова Юсуф, делит рис на четыре равные по его мнению кучки.

Второй (пусть опять Омар) выбирает одну и говорит: «Эту я не хочу!».

Далее очередь Мамеда и Али. Если они *оба* также говорят, что не хотят эту кучку, то её отдают делившему Юсуфу, а три остальные соединяют вместе и делят на троих указанным ранее способом из задачи № 10.

Если кто-нибудь *один* из них (например, Мамед) говорит, что не хочет её, а другой (Али) согласен взять её себе, то кучка отдаётся согласному (Али). Три оставшиеся опять делятся на троих описанным ранее способом.

Сложнее, если последние двое (Мамед и Али) *оба* согласятся взять эту кучку себе. Тогда её временно откладывают в сторону. Омар выбирает ещё одну из трёх оставшихся, которую он также не хочет.

Снова спрашивают мнения Мамеда и Али. Если *оба* её не хотят, то она отдаётся Юсуфу, а оставшиеся (включая отложенную) делятся на троих.

Если кто-нибудь один — и только один! — согласен взять её себе, то он забирает эту кучку, а оставшиеся (включая отложенную) делятся на троих.

Если оба опять говорят, что согласны взять и эту кучку, то она соединяется с отложенной, и Мамед с Али делят получившееся на двоих по способу Омара. Оставшиеся две Юсуф с Омаром делят между собой тем же способом.

## 12. Помилование и три узника

---

В это очень трудно поверить, но шансы Омара после разговора с тюремщиком так и остались прежними —  $\frac{1}{2}$ . А вот шансы Мамеда вдвое больше:  $\frac{3}{4}$ .

Чтобы понять это, рассмотрим все возможные варианты событий после того, как Омар высказал тюремщику свою просьбу. Их четыре:

1. Помилован Мамед, тюремщик назвал Юсуфа (вероятность  $\frac{1}{4}$ );
2. Помилован Юсуф, тюремщик назвал Мамеда (вероятность  $\frac{1}{4}$ );
3. Помилован Омар, тюремщик назвал Юсуфа (вероятность  $\frac{1}{4}$ );
4. Помилован Омар, тюремщик назвал Мамеда (вероятность  $\frac{1}{4}$ ).

Ситуации, когда тюремщик называет Юсуфа, соответствуют случаям 1 и 3. Как нетрудно видеть, из них первый (помилован Мамед) имеет вдвое большую вероятность, чем второй (помилован Омар).

Можно привести и ещё одно объяснение. Омар правильно оценил свои начальные шансы как  $\frac{1}{2}$ . Основания для их переоценки были бы лишь в том случае, если бы он получил от тюремщика некую *значимую* информацию. В данном же случае тюремщик просто сообщил ему тривиальный факт: одного из двух других узников не выпустят. Кого именно — на судьбу Омара совершенно не влияет. Зато это влияет на шансы узника, остающегося «третьим», так что рассуждение Мамеда, хоть и наивное, было в общем правильным.

## 13. Верблюды и стойла

---

Каждого верблюда, уже находящегося в караван-сараяе, нужно перевести в стойло, номер которого в два раза больше нынешнего. Таким образом, все стойла с нечётными номерами (1,3,5,7,9,...) освободятся.

После этого каждого  $n$ -ого верблюда из числа вновь прибывших можно разместить в стойло с номером  $(2n - 1)$ .

## 14. Караван и пустыня

---

Будем для краткости называть расстояние 500 ПС *переходом*, а набор пищи и воды, который позволит каравану преодолеть его, *запасом*. Требуется проверить возможность того, что караван способен пройти  $1\frac{2}{3}$  перехода.

По определению, один запас и один рейс позволят каравану пройти один переход.

Два запаса и два рейса позволяют пройти  $1\frac{1}{3}$  перехода. Вот как это делается. Пройдя  $\frac{1}{3}$  перехода и истратив на это  $\frac{1}{3}$  запаса, караван оставляет ещё  $\frac{2}{3}$  запаса в схроне, а последнюю  $\frac{1}{3}$  тратит на обратный путь. Пополнив истраченные запасы в городе, караван снова уходит в пустыню. Прделав  $\frac{1}{3}$  перехода, он оказывается у схрона и возобновляет запас до полного, что позволяет ему пройти ещё один переход.

Три запаса позволяют пройти сверх того ещё  $\frac{1}{3}$  перехода. Для этого в точку, отстоящую от города на  $\frac{1}{3}$ , двумя завозами доставляют два раза по  $\frac{2}{3}$  запаса — итого  $1\frac{1}{3}$ . После этого караван с полным запасом выходит из города и возле схрона располагает двумя ( $\frac{2}{3}+1\frac{1}{3}=2$ ) запасами, которые, как мы знаем, позволяют пройти  $1\frac{1}{3}$  перехода. Этого, правда, всё ещё мало, так как  $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}<1\frac{2}{3}$ .

Если продолжать подобным образом, то можно увидеть, что  $n$  запасов позволяют каравану пройти расстояние, равное

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \text{ переходам.}$$

При  $n = 4$  эта величина уже превышает требуемое расстояние  $1\frac{2}{3}$ .

Как же должны действовать караванщики? Поскольку уже известно, что три запаса позволяют пройти  $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$  перехода, а это составляет  $766\frac{2}{3}\%$  ПС, им необходимо устроить схрон на расстоянии  $33\frac{1}{3}\%$  ПС (это  $1/15$  перехода) от города и оставить в нём не менее  $31/15$  запаса. Выйдя из города, полностью снаряжённый караван доходит до схрона и к этому моменту располагает тремя запасами. Дальнейшие действия должны быть такими, как описано выше.

Ответ на последний вопрос наставника (любую ли пустыню можно пересечь такому каравану) будет положительным, так как ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$$

расходится и, следовательно, его частичные суммы неограниченно возрастают.

## 15. Всадник и караван

---

Будем считать единичным то время, за которое караван проходит свою длину, т.е., 1 ПС. В такой системе скорость каравана также будет равна единице.

Собственная скорость всадника нам неизвестна и мы обозначим её  $x$ . Пока всадник двигался от «хвоста» к «голове», его скорость относительно каравана составляла  $(x - 1)$ , а при обратном движении, соответственно,  $(x + 1)$ . В каждом случае путь составлял 1 ПС, а на всё перемещение была потрачена одна единица времени. Отсюда получаем уравнение

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} = 1,$$

которое приводится к квадратному  $x^2 - 1 = 2x$ .

Это квадратное уравнение имеет единственный положительный корень  $x = 1 + \sqrt{2}$ . Он даёт нам скорость всадника, и именно столько ПС ему пришлось проскакать за единицу времени.